KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Jarosław Mederski i Sławomir Plaskacz

Wstęp do matematyki finansów i ubezpieczeń

Materiały dydaktyczne dla studentów II-go roku matematyki
specjalność: matematyka w ekonomii i finansach.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Toruń 2009

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

Rozdział 1

Matematyka finansowa

1.1 Model dyskretny akumulacji kapitału

1.1.1 Procent prosty

Obliczanie odsetek dla bankowca, urzędnika skarbowego, księgowej itp., odbywa się w oparciu o schemat nazywany *procentem prostym.* Odsetki O obliczamy mając podaną roczną stopę procentową r, okres t (podany w dniach), za który odsetki są naliczane oraz kwotę P, od której liczymy odsetki według wzoru

$$O = t \cdot \frac{r}{365} \cdot P \tag{1.1.1}$$

W powyższej formule przyjęliśmy umownie, że rok ma 365 dni (bez podziału na lata przestępne i nieprzestępne).

Przykład 1.1. Odsetki od kwoty 100 zł przy rocznej stopie procentowej 24% za okres 30 dni wynoszą

$$O = 30 \cdot \frac{0,24}{365} \cdot 100 = 1,97$$

Natomiast odsetki za okres 31 dni wynoszą 2,04 zł. Przy obliczaniu liczby dni bierze się pod uwagę faktyczną liczbę dni (z uwzględnieniem 29 lutego w latach przestępnych).

1.1.2 Procent składany

Kapitał (końcowy) K będący sumą kapitału początkowego P oraz odsetek O wyraża się jako

$$K = P + O$$

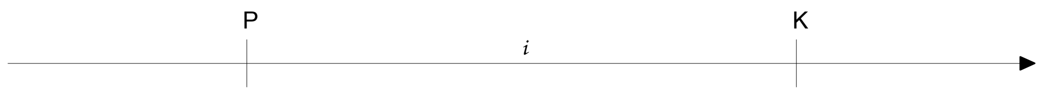
Odsetki O obliczamy w oparciu o stopę procentową i oraz kapitał początkowy P jako iloczyn $O = iP$. Po podstawieniu dostajemy

$$K = P + iP$$

Czyli

$$K = (1 + i)P \tag{1.1.2}$$

Współczynnik $(1 + i)$ nazywany jest *współczynnikiem akumulacji.* Najprostszy schemat akumulacji kapitału ilustrujemy na osi czasowej w postaci:



Rysunek 1.1.1: Akumulacja kapitału.

Przykład 1.2. Kapitał początkowy $P = 1750$ (złotych) ulokowano na 5%. Ile wyniesie kapitał wraz z odsetkami?
Rozwiązanie:
Odpowiadając na pytanie, standardowo obliczamy najpierw odsetki $O = 0,05 \cdot 1750 = 87,50$, a następnie powiększamy kapitał początkowy o odsetki, tzn. $1750 + 87,50 = 1837,50$. Posłużenie się formułą (1.1.2) pozwala (o ile posługujemy się kalkulatorem) nieco szybciej uzyskać wynik, bo obliczenie współczynnika akumulacji $1 + i$ można wykonać "w pamięci": $1,05 \cdot 1750 = 1837,50$.

Przykład 1.3. Zainwestowano kapitał początkowy $P = 1245$ złotych i w wyniku tej inwestycji uzyskano kapitał końcowy $K = 1295$ złotych. Obliczyć stopę zwotu dla tej inwestycji.
Rozwiązanie:
W równaniu (1.1.2) niewiadomą jest stopa procentowa i, którą w tym kontekście nazywamy *stopą zwrotu* (z inwestycji). Obliczamy najpierw współczynnik akumulacji ze wzoru (1.1.2)

$$1 + i = \frac{K}{P} = \frac{1295}{1245} \approx 1,040160643$$

Podana dokładność rozwiązania zdecydowanie przekracza zwykłe potrzeby. Zazwyczaj w zupełności wystarcza podanie stopy procentowej z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Odpowiedź brzmi $i = 4,02\%$.

W powyższych przykładach pominięto czynnik czasu. W przypadku lokat bankowych odsetki mogą być traktowane jako wynagrodzenie otrzymywane w zamian za prawo dysponowania kapitałem. Tak jak czynsz za wynajmowane mieszkanie jest opłatą za prawo dysponowania, wykorzystywania mieszkania. Z oczywistych powodów wysokość tej opłaty zależy od wysokości ulokowanego kapitału oraz od długości okresu lokaty. Analogicznie w przypadku wynajmowania mieszkania wysokość opłaty zależy od wielkości mieszkania (oraz innych czynników takich jak: lokalizacja, standard, itp.) oraz od długości okresu wynajmu. W sytuacjach realnych jest bardzo istotne, czy osiągamy stopę zwrotu $4,02\%$ w ciągu roku, czy w ciągu 3 miesięcy. Okres, którego dotyczy podana stopa procentowa nazywamy *okresem bazowym*. Jeżeli nie będziemy podawać okresu, którego dotyczy podawana stopa procentowa - okresu bazowego, to okresem tym domyślnie jest rok.

W procesie akumulacji kapitału bardzo istotną rolę odgrywa operacja *kapitalizacji odsetek*. Polega na powiększeniu kapitału o odsetki i naliczania w następnym okresie odsetek od powiększonego kapitału. Jeżeli kapitał początkowy P jest ulokowany na i procent, to po pierwszym okresie bazowym kapitał będzie wynosił $(1+i)P$. Zakładamy, że po pierwszym okresie następuje kapitalizacja odsetek. Zatem wielkością, od której nalicza się odsetki w drugim okresie jest $(1+i)P$. Zatem kapitał po drugim okresie wyniesie

$$(1+i)\left((1+i)P\right) = (1+i)^2 P$$

Zakładając, że kapitatalizacja odsetek następuje po każdym kolejnym okresie, kapitał K_n po n-tym okresie wyniesie

$$K_n = (1+i)^n P \tag{1.1.3}$$

Przykład 1.4. Ulokowano kapitał początkowy $P = 100$ złotych na lokacie oprocentowanej 10% (rocznie). Kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku. Ile wyniesie kapitał wraz z odsetkami po drugim roku?
Rozwiązanie:
Zgodnie ze wzorem (1.1.3) obliczamy kapitał po drugim roku K_2

$$K_2 = 1,1^2 \cdot 100 = 121$$

Zauważmy, że stopa zwrotu w okresie dwóch lat wyniosła 21%. Przy kapitalizacji odsetek po każdym okresie bazowym stóp procentowych **nie** dodajemy.

Jeżeli oprocentowanie w kolejnych okresach bazowych wynosi i_1, i_2, ... ,i_n i kapitalizacja odsetek następuje po każdym okresie, to kapitał K_n po n-tym okresie wyraża się wzorem

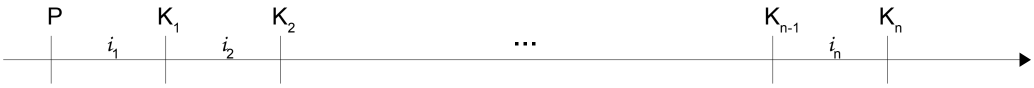
$$K_n = (1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)P \tag{1.1.4}$$

Proces akumulacji można prześledzić na Rysunku 1.1.2.

Powyższą formułę łatwo uzyskać indukcyjnie wykorzystując zależności:

$$K_1 = (1+i_1)P,$$
$$K_{j+1} = (1+i_{j+1})K_j.$$

Procesy, których po każdym okresie następuje kapitalizacja odsetek opisujemy ilościowo **mnożąc przez siebie współczynniki akumulacji**.



Rysunek 1.1.2: Proces akumulacji.

Przykład 1.5. Zastosujemy formułę (1.1.4) do odpowiedzi na pytanie - o ile procent wzrosła cena akcji spółki X w okresie trzech miesięcy jeżeli w pierwszym miesiącu wzrosła o 10%, w drugim o 5%, a w trzecim o 15% ?
Rozwiązanie:
Oznaczamy wyjściową cenę akcji symbolem P_0, a P_i niech oznacza cenę akcji po i-tym miesiącu. Wówczas

$$P_3 = (1 + 0,15)P_2 = (1 + 0,15)(1 + 0,05)P_1 = (1 + 0,15)(1 + 0,05)(1 + 0,10)P_0$$

Zatem

$$P_3 = 1,15 \cdot 1,05 \cdot 1,10 \cdot P_0$$

Współczynnik akumulacji w okresie trzech miesięcy wynosi zatem 1,32825. Cena akcji wzrosła zatem o 32,83% (w zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku). Zauważmy, że dodając stopy procentowe 10%+5%+15%=30% popełniamy błąd.

Przykład 1.6. W banku A oprocentowanie lokaty wynosi: w pierwszym roku 4% i w drugim roku 6%. W banku B oprocentowanie lokaty wynosi: w pierwszym roku 6%, w drugim roku 4%. W którym banku oprocentowanie lokaty dwuletniej jest korzystniejsze, jeżeli kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku?
Rozwiązanie:
Odpowiedź na to pytanie brzmi: banki A, B oferują identyczne oprocentowanie w wysokosci $10,24\%$ w okresie dwuletnim. Na podstawie reguły (1.1.4) otrzymujemy: $1,1024 = 1,04 \cdot 1,06 = 1,06 \cdot 1,04$.

Zadanie 1.1.1. Jaką nawyższą kwotę można wpłacić na 2-miesięczną lokatę oprocentowaną 4,6 % w skali roku, tak aby nie zapłacić podatku od dochodów kapitałowych (potocznie nazywanego podatkiem Belki)?

1.1.3 Roczna efektywna stopa procentowa

Stopa procentowa i podana dla okresu rocznego nabiera innego znaczenia przy różnych okresach kapitalizacji odsetek. Zilustrujemy ten fakt na przykładach liczbowych.

Przykład 1.7. Policzmy kapitał K po 12-tu miesiącach od kapitału $P = 100$ zł przy rocznej stopie procentowej 24% przy miesięcznej kapitalizacji odsetek

$$K = (1 + \frac{0,24}{12})^{12} 100.$$

Posługując się nawet najprostszym kalkulatorem możemy łatwo obliczyć, że $K =$126,82 zł.

Przykład 1.8. Policzmy kapitał K po 12-tu miesiącach od kapitału $P = 100$ zł przy rocznej stopie procentowej 24% przy kwartalnej kapitalizacji odsetek

$$K = (1 + \frac{0,24}{4})^{4} 100.$$

Podobnie jak powyżej obliczamy $K =$126,25 zł.

Przykład 1.9. Policzmy kapitał K po 12-tu miesiącach od kapitału $P = 100$ zł przy rocznej stopie procentowej 24% przy rocznej kapitalizacji odsetek

$$K = (1 + \frac{0,24}{1})^{1} 100.$$

Oczywiście $K =$124 zł.

W każdym z powyższych przykładów można zapytać o równoważną stopę procentową przy kapitalizacji odsetek po roku. W pierwszym przykładzie stopa równoważna równa się 26,82%, w drugim 26,25%, a w trzecim 24%. Mówimy, że w pierwszym przykładzie *roczna efektywna stopa procentowa* $i_{eff} = 26,82\%$, w drugim $i_{eff} = 26,25\%$, w trzecim $i_{eff} = 24\%$.

W przypadku, gdy kapitalizacja odsetek następuje n-krotnie w ciągu roku w równych odstępach czasu to kapitał P w ciągu roku przy rocznej stopie procentowej $i_{(n)}$ wynosi

$$K = (1 + \frac{i_{(n)}}{n})^{n} P. \tag{1.1.5}$$

Zatem *roczna efektywna stopa procentowa* i_{eff} równoważna *nominalnej stopie* $i_{(n)}$ zadana jest przez równanie:

$$1 + i_{eff} = (1 + \frac{i_{(n)}}{n})^{n}. \tag{1.1.6}$$

Przykład 1.10. Podać roczną efektywną stopę procentową dla lokaty kwartalnej oprocentowanej 12,52% w skali roku.
Rozwiązanie:

$$1 + i_{eff} = (1 + \frac{0,1252}{4})^{4}$$
$$1 + i_{eff} = 1,1312$$
$$i_{eff} = 13,12\%$$

Formuła (1.1.6) może po przekształceniu służyć do obliczania nominalnej rocznej stopy procentowej $i_{(n)}$ równoważnej stopie efektywnej i_{eff}

$$i_{(n)} = n((1 + i_{eff})^{\frac{1}{n}} - 1). \tag{1.1.7}$$

Zadanie 1.1.2. Bank zmienił nominalne oprocentowanie lokaty z 8% na 8,2% wydłużając jednocześnie okres kapitalizacji odsetek z kwartału do pół roku. Czy zmiana warunków tej lokaty jest korzystniejsza dla klientów banku?

1.1.4 Dyskontowanie

Obliczanie wartości początkowej kapitału P w oparciu o znajomość stopy procentowej i oraz kapitału końcowego K nazywane jest *dyskontowaniem.* Proste przekształcenie formuły (1.1.2) prowadzi do wzoru

$$P = \frac{1}{1+i}K. \tag{1.1.8}$$

Współczynnik $\frac{1}{1+i}$ w (1.1.8) nazywany jest *współczynnikiem dyskontowania.*

Przykład 1.11. Podać wysokość rocznej lokaty oprocentowanej 15% jeżeli kapitał wraz z odsetkami na koniec roku wyniósł 138 zł.
Rozwiązanie:

$$P = \frac{1}{1,15}138 = 120.$$

W podobny sposób można przekształcić formułę (1.1.4). Dostajemy wzór

$$P = (\frac{1}{1+i})^n K. \tag{1.1.9}$$

Przykład 1.12. Jaką kwotę ulokowano na koncie oprocentowanym 10% rocznie, jeżeli po 5 latach kapitał wraz z odsetkami wynosi 209,37 zł.
Rozwiązanie:

$$P = (\frac{1}{1,10})^5 209,37 = 130.$$

Przykład 1.13. W Polsce minimalna wartość nominalna bonu skarbowego wynosi 10 tys. złotych i najczęściej są one emitowane na okres 13 tygodni, 26 tygodni i 52 tygodni. Jeśli inwestor kupił bon skarbowy 13-tygodniowy po cenie 9847 zł, to współczynnik dyskontowania kapitału końcowego $K = 10000$ zł. o wartości początkowej $P = 9847$ zł. wynosi

$$i = \frac{K-P}{P} = \frac{10000 - 9847}{9847} = 0,016.$$

Podstawową charakterystyką, która określa dochód z inwestycji w bon skarbowy, jest *stopa rentowności bonu skarbowego* określona wzorem:

$$r = i \cdot \frac{360}{t} = \frac{K-P}{P} \cdot \frac{360}{t},$$

gdzie i jest współczynnikiem dyskontowania kapitału końcowego (wartości nominalnej bonu) K o wartości początkowej (cena bonu skarbowego) P, zaś t jest liczbą dni do wykupu bonu skarbowego. W naszym przykładzie stopa rentowności bonu skarbowego wynosi $r = 0,016 \cdot \frac{360}{13 \cdot 7} = 6\%$.

Zadanie 1.1.3. Oblicz stopę rentowności bonów skarbowych: 13-tygodniowy po cenie 9800 zł, 52-tygodniowy po cenie 9300 zł.

Zadanie 1.1.4. Jaką cenę zakupu 26-tygodniowych bonów skarbowych powinien zgłosić bank w swojej ofercie, aby osiągnąć rentowność tej inwestycji w skali roku na poziomie 8%?

1.1.5 Wartość obecna i wartość przyszła strumienia pieniądza

Typowe operacje bankowe odbywają się wieloetapowo. Przykładem klasycznym jest spłata kredytu oraz systematyczne oszczędzanie. Spłata odbywa się zazwyczaj w wielu ratach. Także kredyt może być udzielany stopniowo, w transzach. Z punktu widzenia kredytodawcy jak i kredytobiorcy operacja udzielenia i spłaty kredytu jest zatem ciągiem wpłat oraz wypłat odbywających się w różnych terminach. Załóżmy że, kredyt w wysokości P udzielony jest w całości jednorazowo, a raty w wysokości R_1, R_2, ..., R_n kredytu spłacane są w równych odstępach czasu, w których oprocentowanie wynosi i. Zaznaczamy nad osią czasową wpłaty (wielkości dodatnie), a pod osią wypłatę (wielkość ujemna).

Rysunek 1.1.3: Spłata kredytu.

Plan spłat musi prowadzić do sytuacji, w której po wpłaceniu ostatniej raty zadłużenie zmniejsza się do zera. Powszechnie stosowana jest przy spłacie kredytu zasada, że z każdej raty w pierwszej kolejności spłacane są odsetki, a dopiero pozostała część raty przeznaczana jest na spłatę zadłużenia. Jeżeli zadłużenie po wpłacie k-tej raty oznaczymy Z_k oraz wyjściowe zadłużenie $Z_0 = P$, to powyższą zasadę możemy zapisać następująco

$$Z_{k+1} = (1+i)Z_k - R_{k+1} \tag{1.1.10}$$

Jeżeli spłata zadłużenia ma nastąpić po wpłaceniu n-tej raty, to zadłużenie Z_n po wpłaceniu n-tej raty musi wynosić zero, tzn. $Z_n = 0$.

Przykład 1.14. Przedstawiamy plan spłat kredytu 1200 zł oprocentowanego 24% w skali roku i spłacanego w 12 ratach (Tabela 1.1.1). Każda rata składa się z raty kapitałowej 100 zł oraz odsetek od niespłaconej części kredytu naliczonych za okres ostatniego miesiąca. Zastosowany przy tworzeniu planu spłat schemat obliczania

Tabela 1.1.1: Plan spłaty kredytu.

Numer raty	Zadłużenie po wpłaceniu poprzedniej raty	Odsetki	Rata	Zadłużenie po wpłaceniu raty
1	**1200 zł**	24 zł	124 zł	1100 zł
2	1100 zł	22 zł	122 zł	1000 zł
3	1000 zł	20 zł	120 zł	900 zł
4	900 zł	18 zł	118 zł	800 zł
5	800 zł	16 zł	116 zł	700 zł
6	700 zł	14 zł	114 zł	600 zł
7	600 zł	12 zł	112 zł	500 zł
8	500 zł	10 zł	110 zł	400 zł
9	400 zł	8 zł	108 zł	300 zł
10	300 zł	6 zł	106 zł	200 zł
11	200 zł	4 zł	104 zł	100 zł
12	100 zł	2 zł	102 zł	**0 zł**

zadłużenia po spłacie kolejnych rat nazywany jest *retrospektywnym.* Przykładowo, zadłużenie po wpłaceniu 5-tej raty wynosi 700 złotych. Wielkość tę otrzymaliśmy w tabeli w oparciu przebieg spłaty kredytu w okresie poprzedzającym interesujący nas moment.

Z formuły (1.1.10) wnioskujemy

$$\begin{aligned} Z_k = (1+i)Z_{k-1} - R_k = (1+i)\left((1+i)Z_{k-2} - R_{k-1}\right) - R_k = \\ = (1+i)^2 Z_{k-2} - (1+i)R_{k-1} - R_k = \\ = (1+i)^2\left((1+i)Z_{k-3} - R_{k-2}\right) - (1+i)R_{k-1} - R_k = \ldots \\ = (1+i)^{k-1}\left((1+i)Z_0 - R_1\right) - (1+i)^{k-2}R_2 - \ldots - (1+i)^2 R_{k-2} - (1+i)R_{k-1} - R_k, \end{aligned}$$

a więc

$$Z_k = (1+i)^k P - (1+i)^{k-1}R_1 - (1+i)^{k-2}R_2 - \ldots - (1+i)R_{k-1} - R_k. \tag{1.1.11}$$

Formuła (1.1.11) stanowi tak zwany *retrospektywny* sposób obliczania zadłużenia Z_k po wpłaceniu k-tej raty kredytu.

Z warunku $Z_n = 0$ otrzymujemy zależność

$$(1+i)^n P = (1+i)^{n-1} R_1 + (1+i)^{n-2} R_2 + \ldots + (1+i)^2 R_{n-2} + (1+i) R_{n-1} + R_n$$

Dzieląc obie strony przez $(1+i)^n$ dostajemy

$$P = \frac{1}{1+i} R_1 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 R_2 + ... + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n R_n \tag{1.1.12}$$

Warunek występujący w równości (1.1.12) jest warunkiem równoważnym warunkowi $Z_n = 0$. Zatem warunkiem spłaty kredytu w wyniku realizacji planu spłat jest równość sumy rat kredytu zdyskontowanych na moment udzielenia kredytu oraz kwoty udzielonego kredytu. Wyrażenie występujące po prawej stronie równości (1.1.12) nazywamy *wartością obecną strumienia pieniądza* R_1, R_2, ... R_n.

Przykład 1.15. Kredyt 1500 zł oprocentowany 2% miesięcznie (tzn. 24% rocznie) spłacany jest w trzech ratach miesięcznych wynoszących kolejno : 530 zł, 520 zł, 510 zł. Wykonując plan spłat możemy łatwo się przekonać, że po wpłaceniu ostatniej raty zadłużenie wyniesie 0 zł (Tabela 1.1.2). Plan spłat możemy także zweryfikować

Tabela 1.1.2: Plan spłaty kredytu.

Numer raty	Zadłużenie po wpłaceniu poprzedniej raty	Odsetki	Rata	Zadłużenie po wpłaceniu raty
1	**1500 zł**	30 zł	530 zł	1000 zł
2	1000 zł	20 zł	520 zł	500 zł
3	500 zł	10 zł	510 zł	**0 zł**

posługując sie równością (1.1.12). Suma zdyskontowanych rat kredytu wynosi

$$\frac{1}{1,02} \cdot 230 + \left(\frac{1}{1,02}\right)^2 \cdot 520 + \left(\frac{1}{1,02}\right)^3 \cdot 510 \approx 519,61 + 499,81 + 480,58 = 1500,$$

czyli równa się kwocie udzielonego kredytu.

Zależność (1.1.10) możemy równoważnie wyrazić równością

$$Z_k = \frac{1}{1+i}(Z_{k+1} + R_{k+1}) \tag{1.1.13}$$

Korzystając z faktu, że $Z_n = 0$ oraz z (1.1.13) możemy kolejno obliczyć Z_{n-1}, Z_{n-2}, ..., Z_0. Mianowicie

$$Z_{n-1} = \frac{1}{1+i} R_n$$

$$Z_{n-2} = \frac{1}{1+i}(Z_{n-1} + R_{n-1}) = (\frac{1}{1+i})^2 R_n + \frac{1}{1+i} R_{n-1}$$

I ogólnie

$$Z_k = (\frac{1}{1+i})^{n-k} R_n + (\frac{1}{1+i})^{n-k-1} R_{n-1} + ... + (\frac{1}{1+i})^1 R_{k+1} \qquad (1.1.14)$$

Formuła (1.1.14) stanowi tak zwany *prospektywny* sposób obliczania Z_k - zadłużenia po wpłaceniu k-tej raty kredytu. Zauważmy, że Z_k jest sumą zdyskontowanych na moment wpłacenia k-tej raty rat R_{k+1}, R_{k+2}, ... R_n.

Przejdźmy do policzenia kapitału K zebranego w drodze systematycznego oszczędzania. Przyjmujemy, że wpłaty dokonywane są w równych odstępach czasu, w których oprocentowanie jest stałe i wynosi i. Kapitalizacja odsetek następuje po każdej wpłacie. Wysokość kolejnych wpłat równa się R_1, R_2, ... R_n. Oszczędności po dokonaniu k-tej wpłaty oznaczamy O_k. Oczywiście $O_1 = R_1$

$$O_{k+1} = (1+i)O_k + R_{k+1} \qquad (1.1.15)$$

Zatem

$$O_2 = (1+i)R_1 + R_2$$

$$O_3 = (1+i)^2 R_1 + (1+i)^1 R_2 + R_3$$

Wnioskując indukcyjnie otrzymuje się

$$O_n = (1+i)^{(n-1)} R_1 + (1+i)^{(n-2)} R_2 + ... + (1+i) R_{n-1} + R_n \qquad (1.1.16)$$

Zatem kapitał K zgromadzony po dokonaniu n-tej wpłaty $K = O_n$ jest sumą poszczególnych wpłat zakumulowanych na moment dokonania ostatniej wpłaty. Kapitał K nazywany jest *wartością przyszłą strumienia pieniądza* R_1, R_2, ..., R_n.

Pomimo różnic w interpretacji strumienia pieniądza R_1, R_2, ..., R_n przy spłacie kredytu oraz w systematycznym oszczędzaniu istnieje ścisły związek między wartością obecną P daną przez (1.1.12) oraz wartością przyszłą K daną przez (1.1.16)

$$K = (1+i)^n P \qquad (1.1.17)$$

Zatem strumień pieniądza R_1, R_2, ..., R_n z jednej strony jest równoważny wartości początkowej P, z drugiej wartości końcowej K. Należy pamiętać, że kwoty P i K są różnie datowane, co najlepiej widać na osi liczbowej (Rysunek 1.1.4).

Moment datowania wartości obecnej P oddziela n przedziałów czasowych od momentu datowania wartości przyszłej K, co pozwala poglądowo wyjaśnić związek między P i K.

Szczególnym przypadkiem strumienia pieniądza jest strumień równych rat. Występuje często zarówno w planach spłaty kredytu, jak i w systematycznym oszczędzaniu. W przypadku równych rat możemy znacznie uprościć formułę podająca wartość końcową i wartość obecną strumienia pieniądza. Zacznijmy od wyprowadzenia wzoru na wartość końcową. Oznaczmy wielkość pojedynczej raty R, tzn.

Rysunek 1.1.4: Strumień pieniądza.

$R_1 = R_2 = ... = R_n = R$. Wówczas zależność (1.1.16) możemy przekształcić do postaci

$$K = R((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1)$$

Stosując wzór na sumę skończonego ciągu geometrycznego dostajemy

$$K = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{1.1.18}$$

Wartość początkową strumienia równych rat można łatwo wyrazić stosując (1.1.18) oraz (1.1.17)

$$P = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \tag{1.1.19}$$

Przykład 1.16. Zastosujemy wzór (1.1.19) do policzenia kwoty udzielonego kredytu P, który oprocentowany jest w skali roku 12% i spłacany jest w 6 ratach miesięcznych po 150 zł.
Rozwiązanie:

$$P = 150\frac{1,01^6 - 1}{(1,01)^6 0,01} = 869,3$$

Znając wysokość udzielonego kredytu P ilość rat n oraz oprocentowanie i (oprocentowanie w okresie dzielącym wpłatę kolejnych rat) możemy przekształcić (1.1.19) do postaci

$$R = P\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1} \tag{1.1.20}$$

Przykład 1.17. Policzyć wysokość raty kwartalnej R kredytu udzielonego w wysokości 25 000 zł., oprocentowanego rocznie 16% i spłacanego w ośmiu ratach kwartalnych.
Rozwiązanie

$$R = 25000\frac{(1,04)^8 0,04}{(1,04)^8 - 1} = 3713,20$$

Przykład 1.18. Kredyt udzielony w wysokości 100 000 USD spłacany jest w 10-ciu równych ratach rocznych. Oprocentowanie roczne kredytu wynosi 5,2%. Podać zadłużenie po wpłaceniu 8-mej raty.
Rozwiązanie:
Pierwszy sposób policzenia niespłaconej części kredytu polega na sporządzeniu tabeli z planem spłat. Nie jest to skomplikowane, ale jeżeli nie posługujemy się arkuszem kalkulacyjnym, to zabierze sporo czasu. Poniżej przedstawiamy plan spłat wykonany w Excel'u (Tabela 1.1.3). Drugi sposób opiera się na formule prospektywnej (1.1.14).

Tabela 1.1.3: Plan spłaty kredytu w równych ratach.

Nr raty	Zadłużenie po wpłaceniu poprzedniej raty	Odsetki	Rata	Zadłużenie po wpłaceniu raty
1	**100000 zł**	5200 zł	13 076,54 zł	92 123,46 zł
2	92 123,46 zł	4 790,42 zł	13 076,54 zł	83 837,34 zł
3	83 837,34 zł	4 359,54 zł	13 076,54 zł	75 120,35 zł
4	75 120,35 zł	3 906,26 zł	13 076,54 zł	65 950,07 zł
5	65 950,07 zł	3 429,40 zł	13 076,54 zł	56 302,93 zł
6	56 302,93 zł	2 927,75 zł	13 076,54 zł	46 154,15 zł
7	46 154,15 zł	2 400,02 zł	13 076,54 zł	35 477,62 zł
8	35 477,62 zł	1 844,84 zł	13 076,54 zł	24 245,92 zł
9	24 245,92 zł	1 260,79 zł	13 076,54 zł	12 430,17 zł
10	12 430,17 zł	646,37 zł zł	13 076,54 zł	0 zł

Zadłużenie po wpłaceniu 8-mej raty jest równoważne dwóm pozostałym do spłacenia ratom. Ponieważ rata $R = 13076,54$, to

$$Z_8 = 13076,54\frac{1,052^2-1}{1,052^2 0,052} = 24245,92$$

(W Excel'u użyjemy funkcji PPMT(0,052;9;10;-100000)+PPMT(0,052;10;10;-100000)).

Zadanie 1.1.5. Kredyt udzielony w wysokości 35 000 zł spłacany jest 24 równych ratach miesięcznych. W momencie udzielenia kredytu oprocentowanie roczne wynosiło 19,6%. Po wpłaceniu 16-tej raty oprocentowanie zmniejszyło się do 18,9%. Podać wysokość pierwszych 16-tu rat oraz ostatnich 8-miu.

Zadanie 1.1.6. Klient może spłacać kredyt w systemie ratalnym co miesiąc kwotę 650 zł przez okres 5 lat. Oprocentowanie roczne kredytu wynosi 18%. Na jaką kwotę możę zostać udzielony kredyt?

Zadanie 1.1.7. W systemie sprzedaży ratalnej towar kosztujący 2559 zł można nabyć płacąc w momencie zakupu 30% ceny towaru, a następnie wpłacając 10 rat miesięcznych po 200 zł każda. Dostępny kredyt bankowy w równych ratach oprocentowany jest 13,5% rocznie, ale bank pobiera 3% prowizji przy jego udzieleniu. Czy bardziej opłaca się skorzystać z oferty agencji sprzedaży ratalnej, czy wziąć kredyt bankowy?

Zadanie 1.1.8. Jaką kwotę należy mieć na rachunku bankowym, aby przez dwa lata móc pobierać z niego 1000 zł. na koniec każdego kwartału? Nominalne oprocentowanie rachunku wynosi 6%.

1.1.6 Wewnętrzna stopa zwrotu

Do analizy przepływów pieniężnych stosowany jest powszechnie wskaźnik nazywany *wewnętrzną stopą zwrotu*, który będziemy w skrócie nazywać IRR od nazwy angielskiej Internal Rate of Return. W szczególności można go stosować do oceny kosztu kredytu, jak również efektywności inwestycji.

Przykład 1.19. Przeanalizujemy strumień pieniądza związany z kosztami budowy, a następnie modernizacji biurowca oraz zysków z wynajmu powierzchni biurowej i ze sprzedaży budynku. W pierwszym roku realizacji inwestycji koszty wyniosły 1 200 000 zł, w drugim 2 800 000 zł. W ciągu następnych 5-ciu lat zysk po opodatkowaniu z tytułu wynajmu biur wynosił rocznie 200 000 zł. W kolejnym roku przeprowadzono modernizację, której koszt przekroczył o 500 000 zł przychody z wynajmu. W trakcie kolejnych 4 lat zysk netto z wynajmu wynosił 300 000 zł rocznie. W ostatnim roku budynek sprzedano za sumę 3 500 000 zł. Oznaczać będziemy symbolem W_k koszty lub zyski w k-tym roku inwestycji. Wydatki będziemy brali ze znakiem minus, a zyski ze znakiem plus. Powyższe dane zebrane są w Tabeli 1.1.4. Wewnętrzną stopą zwrotu

Tabela 1.1.4: Tabela przepływów pieniężnych.

Lp.	W_k	Wartość zdyskontowana
1	-1200000	-1200000
2	-2800000	-2724000,39
3	200000	189290,26
4	200000	184152,41
5	200000	179154,01
6	200000	174291,28
7	200000	169560,54
8	-500000	-412395,52
9	300000	240721,19
10	300000	234187,37
11	300000	227830,88
12	300000	221646,93
13	3500000	2515693,06

nazywamy stopę procentową i, przy której suma zdyskontowanych wpłat/wypłat z uwzględnieniem znaku równa się zero. Moment, na który dyskontujemy można usytuować dowolnie. Najczęściej sytuujemy go na osi czasowej w tym momencie, w którym odbywa się pierwszy przepływ (wpłata lub wypłata). Obliczenie IRR wymaga zastosowania metod numerycznych. W praktyce można wykorzystać funkcje wbudowane w arkusz kalkulacyjny Excel (funkcja IRR). W powyższym przykładzie wewnętrzna stopa zwrotu wynosi 2,79%. Ostatnia kolumna w powyższej tabeli podaje zdyskontowaną wartość przepływów pieniężnych. Zsumowanie kwot z tej kolumny powinno dać w wyniku zero. W praktyce dostajemy kwotę około 130, co przy tej skali inwestycji jest wystarczająco dobrym przybliżeniem.

Formalnie IRR dla strumienia pieniądza (ang. Cash Flow) P_1, P_2, ... P_n definiujemy jako stopę procentową i, przy której zachodzi równość

$$P_1 + \frac{1}{1+i}P_2 + (\frac{1}{1+i})^2 P_3 + ... + (\frac{1}{1+i})^{n-1} P_n = 0 \tag{1.1.21}$$

Problem wyznaczenia IRR z matematycznego punktu widzenia sprowadza się do wyznaczenia pierwiastka wielomianu

$$P_1 + P_2 x + P_3 x^2 + ... + P_n x^{n-1} = 0$$

Dla $n - 1 \geq 5$ zadanie to można rozwiązywać wyłącznie metodami numerycznymi, co w dobie powszechnego stosowania elektronicznych narzędzi obliczeniowych nie stanowi większego problemu.

Zastosujemy wskaźnik IRR do odpowiedzi na pytanie postawione w Zadaniu 1.1.7 z poprzedniego paragrafu. W tym celu należy określić przepływy pieniężne w obu opcjach kredytowania zakupu towaru. Zakładamy, że kupujący dysponuje gotówką 767,70 zł (30% ceny towaru) niezbędną do zakupienia towaru na raty. Brakująca do pełnej ceny towaru kwota to 1791,30 zł. Aby uzyskać taką kwotę z banku, należy uwzględnić pobieraną 3% prowizję. Zatem należy wystąpić o kredyt w wysokości 1846,70 zł. Przy oprocentowaniu rocznym 13,5% spłata tego kredytu nastąpi w 10 ratach po 196,29 zł każda. W poniższej Tabeli 1.1.5 zestawiamy przepływy pieniężne w przypadku kredytowania zakupu przez agencję kredytową i przez bank. Zwróćmy uwagę, że pierwsza kwota (kredyt) jest w obu przypadkach brana ze znakiem minus.

W wariancie pierwszym IRR wynosi 2,06% (stopa miesięczna). Dla kredytu bankowego IRR wynosi 1,70% (stopa miesięczna). Zatem koszt kredytu udzielonego przez agencję mierzony (obiektywnie) roczną efektywną stopą procentową wynosi 27,66%, natomiast dla kredytu bankowego roczna efektywna stopa procentowa wynosi 22,40%. Należy podkreślić, że w wielu krajach, także w Polsce jest obowiązek ustawowy informowania klienta o koszcie kredytu mierzonym roczną efektywną stopą procentową.

Rzeczywista roczna stopa oprocentowania pozwala klientowi ocenić ofertę banku, ponieważ oprócz oprocentowania uwzględnia ona wszystkie obciązające go koszty kredytu, np. prowizje. Na podstawie ustawy z dnia 20 lipca 2001 r. o kredycie

Tabela 1.1.5: Tabela przepływów pieniężnych.

Lp.	System ratalny	Kredyt bankowy
1	-1791,30	-1846,70
2	200	196,29
3	200	196,29
4	200	196,29
5	200	196,29
6	200	196,29
7	200	196,29
8	200	196,29
9	200	196,29
10	200	196,29
11	200	196,29

konsumenckim (Dziennik Ustaw z 2001 r. nr 100 poz. 1081) rzeczywista roczna stopa oprocentowania i obliczana jest zgodnie z następującym wzorem:

$$\Sigma_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \Sigma_{K'=1}^{K'=m'} \frac{A_{K'}}{(1+i)^{t_{K'}}}, \tag{1.1.22}$$

przy następujących oznaczeniach:

- K - numer kolejnej wypłaty raty kredytu,
- K' - numer kolejnej spłaty kredytu lub kosztów,
- A_K - kwota wypłaty raty kredytu K,
- $A'_{K'}$ - kwota spłaty kredytu lub kosztów K',
- m - numer ostatniej wypłaty raty kredytu,
- m' - numer ostatniej spłaty kredytu lub kosztów,
- t_K - okres, wyrażony w latach lub ułamkach lat, między pierwszą wypłatą i kolejnymi wypłatami, począwszy od 2 do wypłaty m,
- $t_{K'}$ - okres, wyrażony w latach lub ułamkach lat, między pierwszą wypłatą kredytu i kolejnymi spłatami kredytu lub kosztów, począwszy od 1 do spłaty m'.

Ponadto wynik obliczeń i podaje się z dokładnością do co najmniej jednego miejsca po przecinku, przy czym jeżeli cyfra występująca po wybranym przez obliczającego miejscu po przecinku jest mniejsza niż 5, cyfrę tę pomija się, zaś gdy jest większa albo równa 5, cyfrę poprzedzającą zwiększa się o 1.

Przykład 1.20. Kredyt o wysokości 1000 zł będzie spłacony jedną ratą w wysokości 1250 zł po upływie 1,5 roku. Wówczas przyjmujemy: $m = 1$, $K = 1$, $A_1 = 1000$, $t_1 = 0$, $m' = 1$, $K' = 1$, $A'_1 = 1250$, $t'_1 = 1,5$ i równanie (1.1.22) przyjmuje postać:

$$\frac{1000}{(1+i)^0} = \frac{1250}{(1+i)^{1,5}}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $i = \sqrt[3]{1,5625} - 1 \approx 0,1603971$, a zatem rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosi $16,04\%$.

Załóżmy, że istnieje jednostka czasu ω, zwana *okresem bazowym* taka, że okresy wypłat t_K i spłat $t_{K'}$ (dla $K = 0,...m$, $K' = 0,...m'$) kredytu stanowią całkowitą wielokrotność okresu bazowego. Wówczas $t_K = n_{K'} * \omega$, $t_{K'} = n_{K'} * \omega$, gdzie n_K, $n_{K'}$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Zatem równanie (1.1.22) może być zapisane w postaci:

$$-\Sigma_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{((1+i)^\omega)^{n_K}} + \Sigma_{K'=1}^{K'=m'} \frac{A_{K'}}{((1+i)^\omega)^{n_{K'}}} = 0. \tag{1.1.23}$$

Przyjmując $(1+i)^\omega = 1 + i'$, powyższe równanie przyjmuje postać równania (1.1.21), tzn. i' jest wewnętrzną stopą zwrotu dla odpowiedniego strumienia pieniądza.

Przykład 1.21. W Przykładzie 1.20 okresem bazowym jest półroku ($\omega = 0,5$). Stąd można obliczyć wewnętrzną stopą zwrotu dla strumienia pieniądza -1000, 0, 0, 1250, która wynosi $i' = 7,72\%$ (w Excelu funkcja IRR(-1000,0,0,1250)). Stąd rzeczywista roczna stopa oprocentowania $i = (1 + i')^{1/\omega} - 1 = 1,0772^2 - 1 = 0,16035984 = 16,04\%$. Ostateczny wynik w arkuszu kalkulacyjnym Excel możemy otrzymać za pomocą funkcji EFFECT(2*IRR(-1000,0,0,1250);2). Zauważmy, że jeżeli przyjmiemy za okres bazowy jeden miesiąc ($\omega = \frac{1}{12}$), to rzeczywista roczna stopa oprocentowania dla strumienia pieniądza -1000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1250 jest taka sama jak powyżej i wynosi $16,04\%$. Natomiast wewnętrzna stopa zwrotu dla tego strumienia jest równa $1,25\%$.

Przykład 1.22. Kredyt z Przykładu 1.20 został wypłacony w dwóch ratach po 500zł na początku i po upływie pół roku. Wówczas przyjmujemy: $m = 2$, $K = 1$, $A_1 = 500$, $t_1 = 0$, $K = 2$, $A_2 = 500$, $t_2 = 0,5$, $m' = 1$, $K' = 1$, $A'_1 = 1250$, $t'_1 = 1,5$ i równanie (1.1.22) przyjmuje postać:

$$\frac{500}{(1+i)^0} + \frac{500}{(1+i)^{0,5}} = \frac{1250}{(1+i)^{1,5}}.$$

Rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosi $19,45\%$ (w Excelu: EFFECT(2*IRR(-500,-500,0,1250);2)).

Przykład 1.23. Nadal rozważamy kredyt z Przykładu 1.20. Zakładamy, że na początku bank pobrał prowizję w wysokości 3% całości kredytu. Wówczas przyjmujemy: $m = 1$, $K = 1$, $A_1 = 500$, $t_1 = 0$, $m' = 2$, $K' = 1$, $A'_1 = 0,03 * 1000 = 30$, $t'_1 = 0$, $K' = 2$, $A'_2 = 1250$, $t'_2 = 1,5$ i równanie (1.1.22) przyjmuje postać:

$$\frac{1000}{(1+i)^0} = \frac{30}{(1+i)^0} + \frac{1250}{(1+i)^{1,5}}.$$

Rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosi $18,42\%$ (w Excelu: EFFECT(2*IRR(-970,0,0,1250);2)).

Przykład 1.24. Kredyt z Przykładu 1.20 spłacamy przez 1,5 roku (18 miesięcy) co miesiąc w wysokości $\frac{1250}{18} = 69,44$ zł. Wówczas rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosi $33,89\%$.

Przykład 1.25. Kredyt z Przykładu 1.20 spłacamy przez 1,5 roku (18 miesięcy) co kwartał w wysokości 400 zł. Wówczas rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosi $20,34\%$.

Zadanie 1.1.9. Jaka powinna być stała rata kredytu z Przykładu 1.20 spłacanego co kwartał w stałej wysokości tak, aby rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosiła $16,04\%$?

Zadanie 1.1.10. Bank udziela kredytu w wysokości 3000 zł na okres 5 miesięcy i pobiera prowizję w wysokości 5%. Kredyt spłacany jest w dwóch ratach po 1600 zł. po trzecim i piątym miesiącu. Jaka jest rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu?

Zadanie 1.1.11. Czy w kredycie z Zadania 1.1.10 korzystniejsza jest oferta, w której klient spłaca kredyt w jednej racie po 5 miesiącach w wysokości 3250 zł?

Zadanie 1.1.12. Jaka jest prowizja banku w kredycie z Zadania 1.1.10, jeśli rzeczywista stopa oprocentowania tego kredytu wynosi 24%?

1.1.7 Ogólny plan spłaty kredytu

Przyjmiemy, że kredyt udzielony w wysokości P spłacany jest w n ratach R_1, R_2, ..., R_n. Oprocentowanie kredytu jest zmienne i w kolejnych okresach wynosi i_1, i_2, ..., i_n. Oznaczymy zadłużenie po wpłaceniu k-tej raty symbolem Z_k, które obliczy się

(1.1.24) $$Z_k = (1+i_k)Z_{k-1} - R_k$$

Schemat ten możemy zilustrować na osi czasowej

Współczynnik dyskontowania w okresie, między spłatą $(k-1)$-szej i k-tej raty oznaczamy v_k,

$$v_k = \frac{1}{1+i_k}$$

Rysunek 1.1.5: Ogólny plan spłaty kredytu.

Tożsamość (1.1.24) możemy zapisać w postaci

$$Z_{k-1} = v_k Z_k + v_k R_k \tag{1.1.25}$$

Przyjmując, że spłata kredytu następuje po spłaceniu n-tej raty, tzn. $Z_n = 0$ oraz korzystając z zależności (1.1.25) otrzymujemy

$$Z_{k-1} = v_k R_k + v_k v_{k+1} R_{k+1} + \ldots + v_k v_{k+1} \ldots v_n R_n \tag{1.1.26}$$

i w szczególności

$$P = Z_0 = v_1 R_1 + v_1 v_2 R_2 + \ldots + v_1 v_2 \ldots v_n R_n \tag{1.1.27}$$

Tożsamość (1.1.27) można interpretować jako równość kwoty udzielonego kredytu P oraz jego sumy zdyskontowanych na moment udzielenia kredytu rat.

Zadanie 1.1.13. Udzielono kredytu na kwotę 10 000 zł w równych miesięcznych ratach na okres trzech lat. W pierwszym roku oprocentowanie kredytu wynosiło 10%, w drugim 15%, zaś w trzecim roku 20%. Ile wyniosła rata kredytu? Czy korzystniej jest wziąć kredyt ze stałą roczną stopą oprocentowania równą 15%?

1.2 Ciągły model akumulacji kapitału

Praktyczny problem wyceny wartości obligacji w dowolnym momencie między emisją, a wykupem prowadzi do modelu kapitalizacji odsetek w sposób ciągły, nazywanego także procesem ciągłej akumulacji. Proces ciągłej akumulacji charakteryzuje wielkość nazywana *natężeniem oprocentowania* (ang. force of interest), która odgrywa analogiczną rolę jak stopa procentowa przy kapitalizacji dyskretnej. Dla modelu ciągłego akumulacji kapitału wyprowadzony jest całkowy wzór na wartość końcową ciągłego strumienia pieniądza.

1.2.1 Proces ciągłej kapitalizacji odsetek

Roczna obligacja o wartości nominalnej 100 zł jest oprocentowana 19.2% rocznie. Niech $w(t)$ oznacza wartość obligacji w chwili t, a czas t wyrażony jest w latach, tzn. $w(0)$ oznacza wartość obligacji w chwili emisji ($w(0) = 100$) oraz $w(1)$ oznacza wartość obligacji w chwili wykupu, czyli po roku ($w(1) = 119,2$). Naszym celem jest określenie uczciwej ceny (ang. fair value) obligacji w dowolnym momencie $t \in (0,1)$, czyli miedzy emisją, a wykupem. Zacznijmy od wyznaczenia $w(\frac{1}{2})$. W pierwszej chwili mogłoby się wydawać, że skoro odsetki za okres roku wynoszą 19,2 zł, to za okres półroczny powinny wynosić 9,6 zł. Przyjmijmy, że $w(\frac{1}{2}) = 109,6$. Stopa zwrotu i_1 osiągnięta w pierwszej połowie roku wynosi $i_1 = 9,6\%$, bo

$$1 + i_1 = \frac{109,6}{100} = 1,096$$

a stopa zwrotu i_2 osiągnięta w drugiej połowie roku równa się $i_2 = 8,76\%$, bo

$$1 + i_2 = \frac{119,2}{109,6} = 1,0876$$

Zatem inwestor, który kupił obligację w połowie roku za cenę 109,6 zł, uzyskałby niższa o prawie 1% stopę zwrotu.
Uczciwa cena powinna gwarantować obu inwestorom tę samą stopę zwrotu, tzn.

$$\frac{w(1/2)}{w(0)} = \frac{w(1)}{w(1/2)}$$

Nie jest trudno policzyć, że powyższy warunek oznacza $w(1/2) = 109,18$.

W dalszej części powyższe pytanie o uczciwą cenę uogólnimy na dowolny moment $t \in (0,1)$. Jest to w istocie pytanie o przebieg funkcji $w(t)$ w przedziale $(0,1)$. „Uczciwość" ceny polegać ma na tym, aby wzrost wartości obligacji w czasie od t do $t + \Delta t$ dawał tę samą stopę zwrotu co wzrost wartości obligacji w czasie od t' do $t' + \Delta t$, tzn.

$$\frac{w(t+\Delta t)}{w(t)} = \frac{w(t'+\Delta t)}{w(t')} \tag{1.2.1}$$

dla dowolnych $t, t' \in (0,1)$ takich, że $t + \Delta t, t' + \Delta t \in (0,1)$. Własność wyrażoną formułą (1.2.1) będziemy nazywać zasadą *fair value*. Oznacza to, że wartość wyrażenia

$$\ln\left(\frac{w(t+\Delta t)}{w(t)}\right)$$

nie zależy od wyboru t. Pozwala nam to określić funkcję $\delta(\cdot)$ wzorem

$$\delta(\Delta t) = \ln\left(\frac{w(t+\Delta t)}{w(t)}\right) \tag{1.2.2}$$

dla $\Delta t \in (0, 1-t)$. Zauważmy, że funkcja $\delta(\cdot)$ ma dwie własności

$$\delta(0) = 0 \tag{1.2.3}$$

oraz

$$\delta(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \delta(\Delta t_1) + \delta(\Delta t_2) \tag{1.2.4}$$

Własność (1.2.4) wynika z równości

$$\frac{w(t+\Delta t_1+\Delta t_2)}{w(t)} = \frac{w((t+\Delta t_2)+\Delta t_1)}{w(t+\Delta t_2)} \cdot \frac{w(t+\Delta t_2)}{w(t)}$$

oraz własności funkcji logarytmicznej ($\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$). Z własności (1.2.3) i (1.2.4) (oraz ciągłości) wynika, że $\delta(\cdot)$ jest funkcją liniową, tzn. istnieje współczynnik a taki, że

$$\delta(\Delta t) = a\Delta t$$

Dla $\Delta t = 1$ mamy

$$a = \delta(1)$$

Natomiast $\delta(1)$ można wyznaczyć znając $w(1)$ oraz $w(0)$

$$\delta(1) = \ln\left(\frac{w(1)}{w(0)}\right)$$

Ponieważ $\delta(\Delta t) = \delta(1)\Delta t$, to przyjmując w (1.2.2) $t = 0$ dostajemy

$$e^{\delta(\Delta t)} = \frac{w(\Delta t)}{w(0)}$$

Stąd

$$w(\Delta t) = w(0)e^{\delta(1)\Delta t} \tag{1.2.5}$$

W rozważanym przykładzie $w(0) = 100$ oraz

$$\delta(1) = \ln\left(\frac{119,2}{100}\right) = \ln(1,192) \approx 0,1756$$

Możemy zatem sprawdzić, że

$$w(1/2) = 100e^{0,1756\frac{1}{2}} \approx 109,18$$

Funkcja $w(t)$ zadana wzorem (1.2.5) określająca uczciwą cenę zadana jest w istocie dwoma parametrami: $w(0)$ oraz $\delta(1)$. Wielkość $w(0)$ jest początkową wartością P zainwestowanego kapitału. Natomiast $\delta(1)$ (od tej chwili oznaczany krótko δ) możemy równoważnie wyrazić jako

$$\delta = \ln(1+i) \tag{1.2.6}$$

bo

$$\frac{w(1)}{w(0)} = 1 + i$$

W rozważanym przykładzie $i = 19,2\%$.
Parametr δ dany przez (1.2.6) nazywamy *natężeniem oprocentowania* (ang. force of interest) i.

Zasada *fair value* (1.2.1) oznacza, że możemy poprawnie określić stopę zwrotu $i(\Delta t)$ w okresie Δt ze wzoru

$$1 + i(\Delta t) = \frac{w(t + \Delta t)}{w(t)}$$

W szczególności, dla $\Delta t = \frac{1}{n}$ oraz $k < n$ mamy

$$1 + i(\frac{1}{n}) = \frac{w(\frac{k+1}{n})}{w(\frac{k}{n})}$$

Wnioskując indukcyjnie dostajemy

$$w(1) = (1 + i(\frac{1}{n}))^n w(0)$$

Zatem wartość końcową $w(1)$ otrzymujemy kapitalizując n-krotnej odsetki po każdym okresie długości $\frac{1}{n}$ przy stopie procentowej $i(\frac{1}{n})$. Stopa $i(1)$ jest zatem roczną efektywną stopą procentową, $i(1) = i_{eff}$, odpowiadającą rocznej stopie nominalnej $n \cdot i(\frac{1}{n})$ oraz n-krotnej kapitalizacji w ciągu roku w równych odstępach czasu. Ponieważ

$$1 + i_{eff} = (1 + i(\frac{1}{n}))^n$$

to

$$i(\frac{1}{n}) = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{n}} - 1$$

Jeżeli $i_{(n)}$ oznacza roczną nominalną stopę procentową odpowiadającą n-krotnej kapitalizacji odsetek w ciągu roku równoważną stopie efektywnej i_{eff}, to

$$i(\frac{1}{n}) = \frac{i_{(n)}}{n}$$

Stąd (porównaj (1.1.3))

$$i_{(n)} = \frac{(1 + i_{eff})^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Zauważmy, że $\delta = \ln(1 + i_{eff})$ jest granicą ciągu $i_{(n)}$ (sprawdź to !). Zatem δ **możemy traktować jako nominalną stopę procentową przy ciągłej kapitalizacji odsetek równoważną stopie efektywnej** i_{eff}.

Przykład 1.26. Podać uczciwą wartość (fair value) bonu skarbowego 26 tygodniowego w dniu 31 grudnia, który został zakupiony 15 listopada za cenę 90,91 zł. Wartość nominalna bonu to 100 zł.
Rozwiązanie:
Przyjmujemy, że okresem jednostkowym (bazowym) jest okres inwestycji, czy 182 dni. Od 15 listopada do 31 grudnia mija 46 dni, czyli $\frac{46}{182}$ okresu bazowego. Stopa zwrotu i w okresie bazowym dana jest przez

$$1 + i = \frac{100}{90,91}$$

Czyli

$$\delta = \ln(\frac{100}{90,91})$$

Formuła (1.2.5) w nowych oznaczeniach ma postać

$$w(t) = w(0)e^{\delta t}$$

Stąd

$$w(\frac{46}{182}) = 93,13$$

Czyli uczciwa cena bonu w dniu 31 grudnia powinna wynosić 93,13 zł.

Zadanie 1.2.1. Oblicz wartość kapitału 1000 zł. po trzech latach, jeśli nominalna stopa procentowa wynosi 18% i okres kapitalizacji odsetek jest:
a. roczny,
b. półroczny,
c. miesięczny,
d. ciągły.

Zadanie 1.2.2. Jak zmieni się wartość obligacji w chwili t, gdy zwiększymy dwukrotnie natężenie oprocentowania?

1.2.2 Ciągły model akumulacji ze zmiennym w czasie natężeniem oprocentowania

W poprzednim paragrafie opisaliśmy wartość końcową kapitału przy stałym w czasie natężeniu oprocentowania δ. Teraz przyjmiemy, że natężenie oprocentowania jest funkcją zależną od czasu.

Zacznijmy od przypadku, gdy funkcja $\delta(t)$ jest przedziałami stała. Przedział $[0, T]$ dzielimy na odcinki o końcach $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$. W przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ siła stopy procentowej jest stała i równa się δ_i. Niech $w(t)$ oznacza zakumulowany kapitał początkowy $w(0)$ w chwili t. Ze wzoru (1.2.5) dostajemy

$$w(t_i) = w(t_{i-1})e^{\delta(t_i - t_{i-1})}$$

Wnioskując indukcyjnie dostajemy

$$w(T) = w(t_n) = w(t_{n-1})e^{\delta_n(t_n - t_{n-1})} = w(t_{n-2})e^{\delta_{n-1}(t_{n-1}-t_{n-2})}e^{\delta_n(t_n-t_{n-1})} = ...$$
$$w(0)e^{\delta_1(t_1-t_0)}e^{\delta_2(t_2-t_1)}...e^{\delta_n(t_n-t_{n-1})}$$

Zatem

$$w(T) = w(0)e^{\delta_1(t_1-t_0)+\delta_2(t_2-t_1)+...+\delta_n(t_n-t_{n-1})} \tag{1.2.7}$$

Ponieważ całka z funkcji stałej $\delta(t) = \delta_i$ na przedziale $[t_{i-1}, t_i]$ równa się długości przedziału pomnożonej przez δ_i, tzn.

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta(t)dt = \delta_i(t_i - t_{i-1})$$

to

$$\int_0^T \delta(t)dt = \delta_1(t_1 - t_0) + \delta_2(t_2 - t_1) + ... + \delta_n(t_n - t_{n-1}) \tag{1.2.8}$$

Wzór (1.2.7) możemy przekształcić do postaci

$$w(T) = w(0)e^{\int_0^T \delta(t)dt} \tag{1.2.9}$$

Także w przypadku, gdy funkcja $\delta(t)$ nie jest przedziałami stała to formuła (1.2.9) wyraża wartość końcową kapitału. Gdy $\delta(t)$ jest funkcją ciągłą to dla odpowiednio drobnego podziału funkcja $\delta(t)$ jest na odcinkach $[t_{i-1}, t_i]$ „bliska” stałej $\delta_i = \delta(t_i)$. Zatem suma występująca po prawej stronie we wzorze (1.2.8) jest „dobrym” przybliżeniem całki $\int_0^T \delta(t)dt$. Czytelnik znający teorię całki Riemanna rozpozna sumy Riemanna we wzorze (1.2.8).

Znając wartość końcową kapitału $w(T)$ oraz funkcję $\delta(t)$ na przedziale $(0, T)$ możemy wyrazić wartość początkową wzorem

$$w(0) = w(T)e^{-\int_0^T \delta(t)dt}. \tag{1.2.10}$$

Zadanie 1.2.3. Oblicz wartość kapitału 1000 zł. po pół roku inwestycji, jeśli okresem bazowym jest rok oraz natężenie oprocentowania wyrażone jest wzorem $\delta(t) = 0.1 + 0.2t$, $t \in [0, 1]$. Jakie powinno być stałe natężenie oprocentowania, aby po roku inwestycji otrzymać taką samą wartość końcową kapitału?

1.2.3 Wartość końcowa zmiennego strumienia kapitału przy akumulacji ciągłej

Kolejnym krokiem w kierunku stworzenia modelu, który byłby na tyle bogaty, aby znajdować zastosowanie do opisu rzeczywistych procesów finansowych jest uwzględnienie dopływu, bądź odpływu kapitału. W modelu dyskretnym zasilanie zewnętrzne oznaczało kolejne wpłaty (bądź wypłaty). W modelu ciągłym strumień pieniądza opisuje zmienna w czasie prędkość przepływu. Prędkość przepływu wyrażamy w jednostkach pieniężnych na jednostkę czasu, np. złoty/rok. Jeżeli wpłaty odbywają się ze stałą prędkością p to kwota wpłacona w czasie Δt równa się $p\Delta t$. Przyjmijmy, że w czasie od t_{i-1} do t_i przepływ pieniądza odbywa się ze stałą prędkością p_i oraz siła stopy procentowej jest w tym okresie stała i równa się δ_i. Kwota przepływu w przedziale czasu $[t_{i-1}, t_i]$ równa się $p_i(t_i - t_{i-1})$. Niech $w(t)$ oznacza kapitał w chwili t. Przyjmiemy dla uproszczenia, że kwota przepływająca w czasie $[t_{i-1}, t_i]$ zasila kapitał jednorazowo w momencie t_{i-1}. Zatem

$$w(t_1) = (w(t_0) + p_1(t_1 - t_0))e^{\delta_1(t_1-t_0)}$$

$$w(t_2) = (w(t_1) + p_2(t_2 - t_1))e^{\delta_2(t_2-t_1)}$$

...

$$w(t_n) = (w(t_{n-1}) + p_n(t_n - t_{n-1}))e^{\delta_n(t_n-t_{n-1})}$$

Stąd

$$\begin{aligned} w(T) = \ & w(0)e^{\delta_1(t_1-t_0)+\delta_2(t_2-t_1)+\ldots+\delta_n(t_n-t_{n-1})}+ \\ & p_1 e^{\delta_1(t_1-t_0)+\ldots+\delta_n(t_n-t_{n-1})}(t_1 - t_0)+ \\ & p_2 e^{\delta_2(t_2-t_1)+\ldots\delta_n(t_n-t_{n-1})}(t_2 - t_1) + \ldots \\ & p_n e^{\delta_n(t_n-t_{n-1})}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

Wyrażenie po prawej stronie w powyższej równości jest sumą Riemanna całki w następującym wzorze

$$w(T) = w(0)e^{\int_0^T \delta(t)dt} + \int_0^T p(t)e^{\int_t^T \delta(s)ds}dt \tag{1.2.11}$$

Wzór (1.2.10) jest przypadkiem szczególnym wzoru (1.2.11). Wystarczy wziąć przepływy zerowe, $p = 0$.

Przykład 1.27. Zakładamy, że prędkość przepływu jest stała $p(t) \equiv p$ oraz natężenie oprocentowania także jest stałe $\delta(t) \equiv \delta$. Jaka jest wartość końcowa strumienia wpłat dokonanych w czasie $[0, T]$?
Rozwiązanie:
Ze wzoru (1.2.11)

$$w(T) = \int_0^T pe^{\int_t^T \delta ds}dt$$

Czyli

$$w(T) = p\int_0^T e^{(T-t)\delta}dt$$

Po obliczeniu całki dostajemy

$$w(T) = p\frac{e^{T\delta} - 1}{\delta}$$

W szczególności dla $T = 1$

$$w(1) = p\frac{i}{\delta}$$

Wniosek 1.28. *Kapitał w wysokości 1 oprocentowany w sposób ciągły z natężeniem oprocentowania δ jest równoważny po czasie 1 jednostajnemu strumieniowi wpłat z prędkością p daną wzorem*

$$p = (1+i)\frac{\delta}{i},$$

gdzie $i = e^{\delta} - 1$ jest efektywną stopą zwrotu odpowiadającą oprocentowaniu ciągłemu z natężeniem δ.

Zadanie 1.2.4. Fundusz inwestycyjny założono w chwili $t = 0$ z wpłatą początkową równą 100 zł. Stan funduszu w chwili t wynosi $w(t)$. Na rachunek dokonywane są w sposób ciągły wpłaty z roczną intensywnością $p(t) = 2 + t$. Ciągłe natężenie oprocentowania środków na rachunku wynosi $\delta(t) = 0.2 + 0.1t$. Ile wynosi stan funduszu w chwili $t = 1$?

1.3 Inflacja

W latach 90-tych XX wieku występowała w Polsce wysoka, dwucyfrowa inflacja. Stały wzrost cen powodował znaczne zmniejszanie się siły nabywczej pieniądza. Problem ten został w Polsce opanowany i obecnie inflacja w skali roku nie przekracza 2%-3%. Jednakże nawet tak niską inflację należy uwzględniać w przypadku analizujemy zjawiska i zagadnienia, których czas trwania przekracza 5-10 lat. Ubezpieczenia na życie, ubezpieczenia emerytalne, czy też kredyty hipoteczne mają długoterminowy horyzont czasowy. Rachunek finansowy uwzględniający inflację opiera się na pojęciu realnej stopy procentowej. Istotę tego pojęcia ilustruje następujący poglądowy przykład.

Przykład 1.29. Załóżmy, że ulokowano równowartość 100 kwintali żyta na lokacie rocznej, której oprocentowanie wynosiło 26%. Przyjmijmy, że cena kwintala żyta w momencie założenia lokaty wynosiła 100 zł, a po roku wzrosła o 20 % do 120 zł. Jeżeli inflację rozumieć będziemy jako wzrost ceny żyta, to w ciągu roku inflacja wyniosła 20%. Elementarne obliczenia prowadzą do wniosku, że po roku kapitał wraz z odsetkami wyniesie 12 600 zł. Jest to równowartość 105 kwintali żyta według ceny kwintala żyta 120 zł. Licząc w jednostkach obiektywnych - kwintalach żyta - stopa zwrotu z tej inwestycji wynosi zatem 5%. Zależność między stopą inflacji $i_i = 20\%$, stopą efektywną $i = 26\%$ oraz stopą rzeczywistą $i_r = 5\%$ określa tzw. *wzór Fishera*

$$1 + i = (1 + i_i) \cdot (1 + i_r) \tag{1.3.1}$$

Chcąc zatem określić realną stopę zwrotu i_r dla inwestycji, której efektywna stopa zwrotu wynosi i oraz stopa inflacji w czasie trwania inwestycji wynosi i_i, korzystamy ze wzoru

$$1 + i_r = \frac{1+i}{1+i_i} \tag{1.3.2}$$

Wyjaśnienia wymaga jeszcze kwestia rozumienia i obliczania stopy inflacji. W Polsce instytucją, która oblicza stopy inflacji oraz podaje je do publicznej wiadomości jest Główny Urząd Statystyczny. Punktem wyjścia jest przyjęcie koszyka dóbr. Jeżeli W_p oznacza łączny koszt nabycia wybranego koszyka dóbr na początku rozważanego okresu oraz W_k oznacza łączny koszt nabycia tego samego koszyka dóbr na końcu rozważanego okresu, to *wskaźnik inflacji* $1 + i_i$ wyraża się jako

$$1 + i_i = \frac{W_k}{W_p}$$

W Polsce podstawowym wskaźnikiem inflacji jest wskaźnik cen podstawowych towarów i usług konsumpcyjnych. Występuje on w różnych wariantach: średniorocznej, grudzień do grudnia, miesiąc do miesiąca, dla gospodarstw domowych pracowników, dla gospodarstw domowych pracowników użytkujących gospodarstwo rolne, itd. Przy analizowaniu konkretnego zjawiska należy starannie dobrać wskaźnik uwzględniając, o ile to możliwe, algorytm jego obliczania przez GUS. Instytucje finansowe oferują swoje produkty zazwyczaj na terenie całego kraju i dla różnych grup klientów. Z tego względu nie jest zazwyczaj możliwe uwzględnianie różnych koszyków dóbr do obliczania wskaźnika inflacji przy tworzeniu lub analizowaniu produktów.

Tabela 1.3.1: Stopy inflacji w Polsce w oparciu o wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych.

1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
35,3	32,2	27,8	19,9	14,9	11,8	7,3
2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
10,0	5,4	1,9	0,8	3,3	2,0	0,9

Wysoka i zmieniająca się inflacja wpływa na wysokość i zmienność oprocentowania depozytów i kredytów bankowych. Z oczywistych powodów oprocentowanie depozytu musi przewyższać stopę inflacji. W przeciwnym wypadku oszczędzanie wiązałoby się ze stratą, co w rezultacie oznaczałoby zanik depozytów bankowych. Podstawowym źródłem finansowania kredytów są depozyty bankowe. Zatem oprocentowanie kredytów także musi być wyższe od stopy inflacji. Przy udzielaniu kredytu należy przedstawić plan jego spłaty określający wysokość i termin wpłaty kolejnych rat. Jest to praktycznie niewykonalne w warunkach niepewności w odniesienie do wysokości oprocentowania. Długoterminowe kredyty są podstawowym źródłem finansowania budownictwa mieszkaniowego (kredyty hipoteczne). Ich brak w latach 90-tych był przyczyną wieloletniego zastoju tej branży. Dla zilustrowania trudności z zaplanowaniem spłat kredytu w warunkach wysokiej i zmiennej inflacji rozważmy następujący przykład.

Przykład 1.30. Przyjmijmy, że kredytu w wysokości 100 000 złotych udzielono 1 stycznia 1993 roku. Spłata odbędzie się w 10 ratach rocznych. Oprocentowanie kredytu jest zmienne. Stopa oprocentowania w każdym roku jest ustalana w oparciu o stopę inflacji oraz stopę realną równą 5 %. Przyjmijmy, że spłata odbywa się przy stałej racie kapitałowej. Plan spłat wyglądałby następująco: Porównując wysokość

Tabela 1.3.2: Plan spłaty kredytu przy stałej racie kapitałowej.

Rok	Stopa inflacji	Oprocentowanie kredytu	Zadłużenie na początku roku	Odsetki	Rata
1	35,3%	42,07%	20 000,00 zł	8 413,00 zł	10 413,00 zł
2	32,2%	38,81%	18 000,00 zł	6 985,80 zł	8 985,80 zł
3	27,8%	34,19%	16 000,00 zł	5 470,40 zł	7 470,40 zł
4	29,9%	36,40%	14 000,00 zł	5 095,30 zł	7 095,30 zł
5	14,9%	20,65%	12 000,00 zł	2 477,40 zł	4 477,40 zł
6	11,8%	17,39%	10 000,00 zł	1 739,00 zł	3 739,00 zł
7	7,3%	12,67%	8 000,00 zł	1 013,20 zł	3 013,20 zł
8	10,0%	15,50%	6 000,00 zł	930,00 zł	2 930,00 zł
9	5,4%	10,67%	4 000,00 zł	426,80 zł	2 426,80 zł
10	1,9%	7,00%	2 000,00 zł	139,90 zł	2 139,90 zł

rat kredytu ze średnim wynagrodzeniem w gospodarce narodowej, które w roku 1993 wynosiło 320 zł, a w roku 2002 wynosiło 2098 zł (1706 zł bez składki na ubezpieczenie społeczne płaconej przez pracownika) widzimy, że w pierwszym roku spłaty kredytu roczna rata to ponad 26,6 miesięczne wynagrodzenia przeciętne, a w ostatnim roku spłaty to tylko 1,3 przeciętnych wynagrodzeń.

Alternatywnym planem spłat jest zaplanowanie rat w wielkościach realnych (stałych), a następnie ich coroczna waloryzacja o wskaźnik inflacji. Załóżmy, że spłata kredytu udzielonego w wysokości P zaplanowana jest w ratach r_1, r_2, ... , r_n. Zakładamy, że oprocentowanie kredytu jest stałe oraz równe realnej stopie procentowej i_r. Oznaczamy zadłużenie po wpłaceniu kolejnych rat z_1, z_2, ..., z_n. Przyjmujmy, że $z_0 = k$. Zatem

$$z_k = (1 + i_r) \cdot z_{k-1} - r_k$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Równoważnie możemy zapisać tę równość jako

$$z_{k-1} = vz_k + vr_k$$

Zakładamy, że spłata kredytu następuje po wpłaceniu ostatniej raty kredytu, tzn. $z_n = 0$. Zachodzi zatem

$$P = vr_1 + v^2 r_2 + \ldots + v^n r_n, \tag{1.3.3}$$

gdzie $v = \frac{1}{1+i}$ jest współczynnikiem dyskontowania.

Załóżmy, że stopy inflacji w kolejnych okresach wynoszą ii_1, ii_2, ..., ii_n. Przyjmijmy, że oprocentowanie efektywne kredytu jest zmienne i wynosi w kolejnych okresach ie_1, ie_2, ...,ie_n, gdzie

$$1 + ie_k = (1 + i_r) \cdot (1 + ii_k)$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$

Przyjmijmy, że faktycznie spłacane raty kredytu R_1, R_2, ... , R_n są zwaloryzowanymi o wskaźnik inflacji ratami wstępnie wyliczonymi r_1, r_2, ... , r_n. Czyli

$$R_k = (1 + ii_1)(1 + ii_2) \ldots (1 + ii_k) r_k \tag{1.3.4}$$

Zauważmy, że

$$v^k r_k = v_1 v_2 \ldots v_k R_k$$

gdzie $v_s = \frac{1}{1+ie_s} = \frac{1}{(1+i_r)(1+ii_s)}$. Zatem

$$P = v_1 R_1 + v_1 v_2 R_2 + \ldots v_1 v_2 \ldots v_n R_n \tag{1.3.5}$$

Zatem spłata kredytu następuje po wykonaniu przedstawionego planu spłat.

Pozostaje pytanie o dostosowanie tak skonstruowanego planu spłat do możliwości finansowych kredytobiorcy. W tym celu przyjmiemy identyczne jak poprzednio warunki oprocentowania kredytu, kwotę kredytu i liczbę rat. Przyjmiemy, że spłata odbywa się w realnie równych ratach kapitałowych. Wyjściowy plan spłat zawiera kolumna druga, w której raty zostały obliczone przy założeniu stałego oprocentowania w wysokości 5%. Faktycznie płacone raty są już zwaloryzowane o narastający wskaźnik inflacji podaje kolumna 5.

Tabela 1.3.3: Plan spłaty kredytu w realnie równych ratach kapitałowych.

Rok k	Rata nominalna r_k	Oprocentowanie efektywne ie_k	Wskaźnik inflacji	Rata zwaloryzowana R_k	Zadłużenie faktyczne Z_k
1	3 000,00zł	42,07%	135,3%	4 059,00zł	20 000,00 zł
2	2 900,00zł	38,81%	178,9%	5 187,13zł	24 354,00 zł
3	2 800,00zł	34,19%	228,6%	6 400,56zł	28 618,66 zł
4	2 700,00zł	36,40%	296,9%	8 017,39zł	32 002,81 zł
5	2 600,00zł	20,65%	341,2%	8 870,80zł	35 632,85 zł
6	2 500,00zł	17,39%	381,4%	9 536,11zł	34 118,45 zł
7	2 400,00zł	12,67%	409,3%	9 822,95zł	30 515,54 zł
8	2 300,00zł	15,50%	450,2%	10 355,03zł	24 557,38 zł
9	2 200,00zł	10,67%	474,5%	10 439,67zł	18 008,75 zł
10	2 100,00zł	7,00%	483,5%	10 154,48zł	9 490,61 zł
11					0,00 zł

Zaproponowany plan spłat obarczony jest pewnymi wadami. Patrząc na wysokość faktycznego zadłużenia widzimy, że przez pierwszych 5 lat rośnie ono pomimo regularnego płacenia rat. Wzrost wynika oczywiście ze słabnącej siły nabywczej waluty kredytu. Z punktu widzenia psychologicznego jest to sytuacja trudna do zaakceptowania dla przeciętnego kredytobiorcy. Z drugiej strony wzrastające o wskaźnik inflacji raty będą do udźwignięcia dla kredytobiorcy wyłącznie przy założeniu wzrostu jago dochodów o wskaźnik inflacji. Warunek realnego wzrostu płac występował w całym rozważanym okresie w odniesieniu do płacy średniej. Przeliczając ratę roczną w roku 1993 na średnie wynagrodzenie otrzymujemy 10,4 średnich, w w roku 2002 jest 6,0 średnich wynagrodzeń. Dysproporcja jest znacznie zmniejszona. Jej występowanie ma dwie przyczyny. Po pierwsze wysokość raty w cenach stałych jest także wyraźnie niższa w ostatnim roku spłaty. Po drugie wzrost średniego wynagrodzenia następował szybciej od inflacji.

Rozważania z tego rozdziału mają z dzisiejszej perspektywy znaczenie historyczne.

Zadanie 1.3.1. Stopa inflacji wynosi 3%. Nominalne oprocentowanie rocznej lokaty jest równe 5%. Jaka jest realna stopa zwrotu z inwestycji w roczne lokaty bankowe?

Zadanie 1.3.2. Kredyt w wysokości 25000 zł spłacany jest w 8 równych ratach kwartalnych. Oprocentowanie kredytu wynosi 16%. Ponadto wiadomo, że stopa inflacji w pierwszym roku wyniesie 4%, zaś w drugim 8%. Oblicz ratę kredytu.

Rozdział 2

Ubezpieczenia na życie

Celem tego rozdziału jest przedstawienie podstawowych zagadnień matematyki aktuarialnej. Rozważamy dyskretny model kalkulacji składek i rezerw.

2.1 Tablice trwania życia

Zgodnie z definicją Głównego Urzędu Statystycznego ([5]) tablice trwania życia składają się z kilku funkcji względem wieku, związanych ze sobą matematycznie (m.in. liczba dożywających, liczba zmarłych, prawdopodobieństwo zgonu, przeciętne dalsze trwanie życia), określających teoretyczny proces wymierania populacji w miarę jej starzenia się. Wartości tych funkcji oblicza się na podstawie liczby zgonów i liczby ludności według płci i wieku, zaobserwowanych w danym okresie.

Niech $l_0 = 100000$ będzie początkową liczbą noworodków, zaś l_x oznacza przeciętną liczbę osób dożywających wieku x. Wówczas symbolem ${}_kp_x$ oznaczamy prawdopodobieństwo przeżycia osoby w wieku x (x-latka) co najmniej k-lat ($k \geq 0$). Wówczas otrzymujemy, że

$$ {}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}, $$

${}_0p_x = 1$ oraz ${}_kq_x := 1 - {}_kp_x$ oznacza prawdopodobieństwo śmierci x-latka w ciągu k lat. Ponadto przyjmujemy oznaczenia

$$ p_x = {}_1p_x, \; q_x = {}_1q_x. $$

Zatem $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, gdzie $d_x := l_{x+1} - l_x$ jest liczbą zmarłych w wieku x.

Niech $T(x)$ oznacza zmienną losową określające dalsze trwanie życia osoby w wieku x-lat. Wówczas $K(x) = [T(x)]$ oznacza całkowitą liczbę lat, które x-latek przeżyje do śmierci. Zatem otrzymujemy następujący rozkład zmiennej losowej $K(x)$

$$ \begin{aligned} (2.1.1) \quad P(K(x) = k) &= P(k \leq T(x) < k+1) = P(T(x) < k+1) - P(T(x) < k) = \\ &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_k = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x q_{x+k}. \end{aligned} $$

Zauważmy, że $P(K(x) = 0) = {}_0p_x q_x = q_x$.

Zadanie 2.1.1. Na podstawie TTŻ 2008 oblicz prawdopodobieństwo, że 40 latek będzie żył,

- co najwyżej 10 lat,
- co najmniej 10 lat,
- dokładnie 10 lat.

W tablicach trwania życia często pojawia się symbol e_x oznaczający średnią liczbę całkowitych lat dalszego trwania życia, tzn.

$$e_x = \mathbb{E}(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(K(x) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K(x) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(K(x) \geq k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x.$$

Zadanie 2.1.2. Niech $l_x = 100(100-x)$ dla $x = 0, 1, 2, ..., 100$ w populacji z wiekiem graniczny równym 100. Oblicz e_0.

2.1.1 Jednostajny rozkład śmierci

Na podstawie tablic trwania życia znamy jedynie rozkład zmiennej losowej $K(x)$. Informację o rozkładzie $T(x)$ uzyskamy z informacji o rozkładzie $K(x)$ i $T(x)-K(x)$. Stąd często przyjmuje się, że zmienne losowe $K(x)$ i $T(x) - K(x)$ są niezależne oraz $T(x) - K(x)$ ma jednostajny rozkład na $[0, 1]$. Jest to tzw. założenie o *jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku* (skrót UDD, ang. *uniform distribution of deaths*), z którego wynika ważna zależność: jeśli $u \in [0, 1]$, to

$${}_uq_x = u \cdot q_x.$$

Zadanie 2.1.3. Korzystając z TTŻ 2008 dla kobiet oblicz: ${}_{2.5}p_{40}$, ${}_{3.5}p_{37.5}$.

2.2 Ubezpieczenia na życie

W produktach aktuarialnych uwzględniamy nie tylko rozkład trwania życia osoby ubezpieczającej się, ale również musimy uwzględnić wartość strumienia pieniądza w czasie. Dlatego wprowadza się *techniczną stopę oprocentowania i.*

Bezterminowe ubezpieczenie na życie
Wyobraźmy sytuację w której osobowa w wieku x kupuje polisę, która wypłaca mu 1 zł. na koniec roku śmierci, tzn. w chwili $x + K(x) + 1$. Zatem wartość obecna tego świadczenia jest równa $v^{K(x)+1}$, gdzie $v = \frac{1}{1+i}$ jest czynnikiem dyskontującym. W

takim razie wartość oczekiwana tej polisy wynosi $A_x := \mathbb{E}(v^{K(x)+1})$ i nazywana jest *jednorazową składką netto* (w skrócie JSN). Uwzględniając rozkład (2.1.1) otrzymujemy

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}.$$

W celu obliczenia jednorazowej składki netto wprowadza się do tablic trwania życia *funkcje komutacyjne*. Mianowicie zauważmy, że

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k} = \frac{M_x}{D_x},$$

gdzie przyjmujemy

$$\begin{aligned} D_x &:= v^x l_x \\ C_x &:= v^{x+1} d_x \\ M_x &:= \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}. \end{aligned}$$

Funkcje komutacyjne D_x, C_x, M_x można znaleźć w tablicach trwania życia zależnych od technicznej stopy oprocentowania.

Przykład 2.1. Korzystając z TTŻ 2008 jednorazowa składka netto mężczyzny w wieku 30 lat za bezterminowe ubezpieczenie na życie, które wypłaca 10000 zł. na koniec roku śmierci ($i = 5\%$) wynosi

$$JSN = 10000 A_{30} = 1557,66.$$

Zadanie 2.2.1. Kobieta w wieku 40 lat wykupiła bezterminowe ubezpieczenia na życie za JSN=3000 zł. Znajdź sumę ubezpieczenia (TTŻ 2008,$i = 5\%$). Zmień wiek ubezpieczonej osoby na 60 lat. Jak zmieni się suma ubezpieczenia?

Rozważmy sytuację w której osoba w wieku x wykupuje bezterminowe ubezpieczenie na życie za jednorazową składkę netto w wysokości A_x. Jeśli osoba umrze w ciągu roku, uposażeni otrzymają świadczenie w wysokości 1 zł. Jeśli przeżyje rok, ubezpieczony będzie miał $(x + 1)$ lat i nadal będzie bezterminowo ubezpieczony na życie. Otrzymujemy więc zależność rekurencyjną

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}. \tag{2.2.1}$$

Zadanie 2.2.2. Udowodnij powyższą zależność rekurencyjną.

Zadanie 2.2.3. Osoba w wieku 50 lat płaci jednorazową składkę netto za bezterminowe ubezpieczenie na życie w wysokości 0,6. Osoba starsza o rok zapłaciłaby za ten sam produkt 0,61. Oblicz prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku osoby 50 letniej ($i = 5\%$).

Ubezpieczenie terminowe na n-lat
Ubezpieczony wykupuje polisę, która wypłaca 1 zł na koniec roku śmierci, ale tylko wtedy gdy śmierć nastąpiła w ciągu n-lat. Gdy ubezpieczony osiągnie wiek $(x+n)$ ważność polisy wygasa. Zatem otrzymujemy jednorazową składkę netto w wysokości

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Ubezpieczenie na dożycie
Ubezpieczony wykupuje polisę, która wypłaca 1 zł tylko wtedy gdy dożyje wieku $(x+n)$-lat. Gdy ubezpieczony umrze przed osiągnięciem wieku $(x+n)$ polisa nie wypłaci świadczenia. Jednorazową składkę netto wynosi

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} = v^n{}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Ubezpieczenie na życie i dożycie
Ubezpieczony wykupuje polisę, która wypłaci świadczenie w wysokości 1 zł., gdy ubezpieczony umrze przed osiągnięciem wieku $(x+n)$ lub, gdy dożyje wieku $(x+n)$-lat. Jednorazową składkę netto wynosi

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1}.$$

Zadanie 2.2.4. Korzystając z TTŻ 2008 ($i = 5\%$) oblicz następujące jednorazowe składki netto dla 30 letniego mężczyzny i 30 letniej kobiety: $A^{1}_{30:\overline{10}|}$, $A_{30:\overline{10}|}^{\ \ \ 1}$, $A_{30:\overline{10}|}$, A_{30}. W przypadku terminowych ubezpieczeń na życie zbadaj jak zmienia się wysokość JSN, gdy

- n rośnie,
- x rośnie.

Zadanie 2.2.5. Podobnie jak w przypadku rekurencji (2.2.1) zinterpretuj następującą zależność:

$$A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} \cdot A_{x+n}. \tag{2.2.2}$$

Sprawdź, że dla $n = 1$ powyższa zależność jest rekurencją (2.2.1). Podaj formalny dowód (2.2.2).

2.2.1 Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu

Rozważmy ubezpieczenie x-latka, które wypłaca uposażonym na koniec roku śmierci kwotę c_k $(k \geq 1)$, gdy ubezpieczony umarł w wieku $x + k - 1$. Wówczas jednorazowa składka netto wyraża się wzorem:

$$JSN = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}v^{k+1}P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}.$$

W szczególności, gdy przyjmiemy $c_k := k + 1$ dla $k \geq 0$, to otrzymujemy następujący produkt.

Bezterminowe ubezpieczenie na życie ze świadczeniem rosnącym wypłacanym na koniec roku śmierci

Jednorazowa składka netto wynosi

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{R_x}{D_x},$$

gdzie $R_x := \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}$ jest kolejną funkcją komutacyjną.

Niech teraz $c_k := k + 1$ dla $0 \leq k < n$ oraz $c_k := 0$ dla $k \geq n$.

Ubezpieczenie terminowe na n-lat ze świadczeniem rosnącym wypłacanym na koniec roku śmierci

Jednorazowa składka netto wynosi

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x}.$$

Zadanie 2.2.6. Oblicz jednorazową składkę netto za bezterminowe ubezpieczenie na życie 40 letniej kobiety (TTŻ 2008, $i = 5\%$), które wypłaca świadczenie w wysokości $10000 + k5000$, gdy ubezpieczona umrze w wieku $40 + k$.

2.3 Renty

Renta życiowa bezterminowa

Wyobraźmy sytuację w której osobowa w wieku x kupuje rentą, która wypłaca mu 1 zł. na początku każdego roku, aż do śmierci, tzn. ostatnia rata jest wypłacona w chwili, gdy ubezpieczony osiągnie wiek $x + K(x)$. Zatem wartość obecna tego świadczenia jest równa $1 + v + v^2 + ... + v^{K(x)}$. Otrzymujemy więc jednorazową składkę netto

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}(1 + v + v^2 + ... + v^{K(x)}) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + v + v^2 + ... + v^k) P(K(x) = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(K(x) \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Wówczas

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},$$

gdzie funkcja komutacyjna $N_x := \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$.

Rozważmy sytuację w której osobie w wieku x udzielono kredytu w wysokości 1 zł. Na początku każdego roku, aż do śmierci, x-latek płaci odsetki w wysokości $d := 1 - v = iv$. Zatem suma wszystkich spłaconych odsetek wynosi $d\ddot{a}_x$. Na koniec roku śmierci x-latka zostaje spłacona część kapitałowa kredytu, tzn. 1 zł, której obecna wartość aktuarialna wynosi A_x. Otrzymujemy zatem wzór

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{2.3.1}$$

Zadanie 2.3.1. Udowodnij wzór (2.3.1) wykorzystując równość:

$$1 + v + v^2 + ... + v^{K(x)} = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}.$$

Renta życiowa terminowa przez n-lat
Renta wypłaca x-latowi 1 zł. na początku każdego roku dopóki ubezpieczony żyje, ale nie dłużej niż przez n lat. Jednorazową składkę netto wynosi:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Zadanie 2.3.2. Korzystając z TTŻ 2008 dla mężczyzn oblicz $\ddot{a}_{40}$, $\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$, $\ddot{a}_{40:\overline{20}|}$. Jakie są nierówności pomiędzy tymi wielkościami?

Zadanie 2.3.3. Udowodnij wzór rekurencyjny

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}. \tag{2.3.2}$$

Zinterpretuj lewą i prawą stronę tego wzoru.

Renta życiowa bezterminowa odroczona
Renta wypłaca x-latowi 1 zł. na początku każdego roku dopóki ubezpieczony żyje, ale pierwsza płatność będzie dokonana, gdy ubezpieczony osiągnie wiek $x + n$. Jednorazową składkę netto wynosi:

$$_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x = A_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} \cdot \ddot{a}_{x+n}.$$

Zauważmy, że zachodzi równość:

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x. \tag{2.3.3}$$

W przypadku, gdy $n = 1$ otrzymujemy (2.3.2).

Zadanie 2.3.4. Wiedząc, że $\ddot{a}_x = 12$, $i = 5\%$, $p_x = 0,99$ oraz $p_{x+1} = 0,989$ oblicz bezterminową rentę dla osoby o 2 lata starszej, tzn. $\ddot{a}_{x+2}$.

2.3.1 Renta ogólnego typu

Rozważmy rentę dla x-latka, które wypłaca π_k płacona na początku roku, gdy ubezpieczony jest w wieku $x+k$ dla $k \geq 0$. Wówczas otrzymujemy wzór jednorazową składkę netto za tę rentę:

$$JSN = \sum_{k=0}^{\infty}(\pi_0 v^0 + \pi_1 v^1 + ... + \pi_k v^k)P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k v^k {}_kp_x.$$

W szczególności, gdy przyjmiemy $\pi_k := k+1$ dla $k \geq 0$, to otrzymujemy następujący produkt.
Bezterminowe renta życiowa rosnąca
Jednorazowa składka netto wynosi

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^k {}_kp_x = \frac{S_x}{D_x},$$

gdzie $S_x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} N_{x+k}$ jest kolejną funkcją komutacyjną.

Zadanie 2.3.5. Uzasadnij równość (interpretując obie strony równości oraz podając formalny dowód):

$$\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x.$$

2.3.2 Renta płatna częściej niż raz w roku

Rozważmy sytuację w której płatności w wysokości $\frac{1}{m}$ dokonywane są m razy w roku, np. miesięcznie ($m = 12$), na początku każdego z m okresów. Wówczas przy założeniu UDD (zob. Rozdział 2.1.1) można pokazać, że jednorazowa składka netto wynosi

$$\ddot{a}_x^{(m)} := \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m),$$

gdzie $\alpha(m) := \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}} \approx 1$, $\beta(m) := \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}} \approx \frac{m-1}{2m}$, natomiast $i^{(m)}$ (odp. $d^{(m)}$) jest nominalną stopą oprocentowania (odp. dyskonta) odpowiadającej technicznej stopie oprocentowania i, tzn.

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i \text{ oraz } \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = 1 - d.$$

2.4 Składki netto

Dotychczas rozważaliśmy sytuację, w której polisy ubezpieczeniowe były wykupowane za pomocą jednorazowej składki netto. Teraz rozważamy sytuację, w której ubezpieczony płaci składkę za ubezpieczenie na początku każdego roku w postaci renty dożywotniej lub terminowej. W tym celu zastosujemy zasadę równoważności aktuarialnej analogiczną do zasady równoważności strumieni pieniędzy w matematyce finansowej.

Bezterminowe ubezpieczenie na życie
Niech P_x oznacza stałą składkę za bezterminowe ubezpieczenie na życie osoby w wieku x płatnej na początku każdego roku. Zatem wartość obecna tych składek wynosi $P_x\ddot{a}_x$. Z drugiej strony mamy wartość obecną przyszłych świadczeń, tzn. A_x. Stąd otrzymujemy równość $P_x\ddot{a}_x = A_x$, a więc otrzymujemy wzór na *składkę netto*:
Składka netto: $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$.

Podobnie otrzymujemy następujące składki netto.
Bezterminowe ubezpieczenie na życie ze składką płaconą przez m lat
Składka netto: ${}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$

Ubezpieczenie terminowe na n-lat
Składka netto: $P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

Ubezpieczenie terminowe na n-lat ze składką płaconą przez m lat $(m \leq n)$
Składka netto: ${}_mP_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$

Ubezpieczenie na życie i dożycie
Składka netto: $P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

Renta dożywotnia z pierwszą ratą płatną za n lat i składką płatną przez n pierwszych lat
Składka netto: $\frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

Zadanie 2.4.1. Korzystając z TTŻ 2008 ($i = 5\%$) oblicz roczną składkę netto za bezterminowe ubezpieczenie na życie mężczyzny w wieku 30 lat. Suma ubezpieczenia wynosi 100000 zł. Rozważ trzy przypadki:

- składka płacona do końca życia,
- składka płacona prze 10 lat,
- składka płacona prze 20 lat.

Zadanie 2.4.2. Korzystając z TTŻ 2008 ($i = 5\%$) wyznacz roczną składkę netto płatną prze 20 lat prze mężczyznę w wieku 40 lat, jeśli wiadomo, że osoba ta będzie ubezpieczona na życie do osiągnięcia wieku 65 lat na sumę 100000 zł. W przypadku dożycia 65 lat mężczyzna otrzyma dożywotnią rentę płatną na początku roku w wysokości 10000zł.

Zadanie 2.4.3. Kupujący polisę bezterminową 35-latek ma do wyboru dwie równoważne formuły rocznych składek netto płaconych dożywotnio na początku każdego roku:

- roczna składka rosnąca według wzoru $10 + 5(k+1)$ dla $k = 0, 1, ...,$
- roczna składka rosnąca według wzoru $1 + a(k+1)$ dla $k = 0, 1, ...$

Wyznaczyć wartość parametru a wiedząc, że $D_{35} = 12260$, $D_{35} = 176410$, $S_{35} = 2165170$.

Zadanie 2.4.4. Składka netto w bezterminowym ubezpieczeniu na życie osoby 40 letniej wynosi 350 zł. Składka płacona jest przez cały okres ubezpieczenia na początku każdego roku, zaś suma ubezpieczenia wynosi 100 000 zł. Oblicz składkę osoby o rok starszej, wiedząc, że $v = 0,97$ i $p_{40} = 0,997$.

2.5 Rezerwy netto

Załóżmy, że osoba w wieku x płaci składki na początku każdego roku w wysokości P_x. Po k latach ubezpieczyciel powinien dysponować rezerwą utworzoną ze składek na pokrycie świadczenie ubezpieczenia. W przypadku bezterminowego ubezpieczenia na życie *strata* ubezpieczyciela po k latach od wystawienia polisy wyraża się wzorem:

$$_kL = v^{K(x+k)} - P_x(1 + v + ... + v^{K(x+k)}),$$

gdzie $K(x+k)$ jest liczbą pełnych lat, które przeżyje osoba w wieku $x+k$. *Rezerwę netto* definiujemy jako wartość oczekiwaną straty:

$$_kV_x := \mathbb{E}(_kL) = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}.$$

Nie trudno zauważyć, że w momencie ubezpieczenia rezerwa $_0V_x = 0$. Na ogół ubezpieczyciele dążą do pobierania takich składek, aby $_kV_x > 0$ dla $k > 0$.

Zadanie 2.5.1. W powyższym bezterminowego ubezpieczenia na życie udowodnij, że:

- $_kV_x = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}$
- $_kV_x = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}$

Zadanie 2.5.2. Korzystając z TTŻ 2008 ($i = 5\%$) wykonaj w Excelu obliczenia rezerw netto w kolejnych latach bezterminowego ubezpieczenia na życie mężczyzny ubezpieczonego w wieku 30 lat. Stwórz wykres zależności $k \mapsto {_kV_x}$. Jak będzie wyglądał wykres rezerw, gdy zaczniemy zwiększać wiek ubezpieczonego?

2.5.1 Rezerwy netto - przykłady

Na ogół stratę ubezpieczyciela po k latach od wystawienia polisy wyraża się jako różnicę: *bieżąca wartość w chwili k przyszłych wypłat − bieżąca wartość w chwili k przyszłej składki*. Ponieważ rezerwa jest przeciętną wartością tej straty otrzymujemy więc następujące przykłady kontraktów ubezpieczeniowych i ich rezerw.

Bezterminowe ubezpieczenie na życie
Składka netto: $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Rezerwa netto: ${}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$

Bezterminowe ubezpieczenie na życie ze składką płaconą przez m lat
Składka netto: ${}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$
Rezerwa netto:

$$ {}^m_kV_x = \begin{cases} A_{x+k} - {}_mP_x\ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}, & \text{dla } k \leq m \\ A_{x+k}, & \text{dla} k > m \end{cases} $$

Bezterminowe ubezpieczenie na życie z jednorazową składką netto
Jednorazowa składka netto: A_x
Rezerwa netto po k latach: A_{x+k}

Ubezpieczenie terminowe na n-lat
Składka netto: $P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
Rezerwa netto: ${}_kV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x+k}:\overline{n-k}|} - P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$

Ubezpieczenie terminowe na n-lat ze składką płaconą przez m lat $(m \leq n)$
Składka netto: ${}_mP_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$
Rezerwa netto:

$$ {}^m_kV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{\overset{1}{x+k}:\overline{n-k}|} - {}_mP_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}, & \text{dla } k \leq m \\ A_{\overset{1}{x+k}:\overline{n-k}|}, & \text{dla } m < k \leq n \end{cases} $$

Ubezpieczenie na dożycie
Składka netto: $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
Rezerwa netto: ${}_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$

Ubezpieczenie na życie i dożycie
Składka netto: $P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
Rezerwa netto: ${}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$

Renta dożywotnia z pierwszą ratą płatną za n lat i składką płatną przez n pierwszych lat

Składka netto: $\frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

Rezerwa netto po k latach:

$$\begin{cases} {}_{n-k|}\ddot{a}_{x+k} - \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{mn-k}|}, & \text{dla } k \leq n \\ \ddot{a}_{x+k}, & \text{dla } k > n \end{cases}$$

Zadanie 2.5.3. Korzystając z TTŻ 2008 ($i = 5\%$) wykonaj w Excelu obliczenia rezerw netto w kolejnych latach terminowego ubezpieczenia na życie mężczyzny ubezpieczonego w wieku 30 lat. Składka płacona jest przez $m = 30$ lat. Stwórz wykres zależności $k \mapsto {}_kV_x$. Jak będzie wyglądał wykres rezerw, jeśli okres płacenia składek m będziemy zmniejszać do 1?

Zadanie 2.5.4. Osoba 40-letnia kupiła bezterminowe ubezpieczenie na życie ze świadczeniem 10 000 zł. wypłacanym na koniec roku śmierci, a na początku każdego roku płaci składkę netto w wysokości 300 zł. Po 10 latach przerywa płacenie składek i otrzymuje dwie propozycje równoważne aktuarialnie:

- bezskładkowe ubezpieczenie na życie ze zmniejszoną sumą ubezpieczenia,
- wypłata rezerwy w formie dożywotniej renty o stałej składce.

Wyznacz sumę ubezpieczenia i wysokość składki wiedząc, że $v = 0.95$, $A_{50} = 0.5$.

2.5.2 Kontrakt ubezpieczeniowy ogólnego typu

Rozważmy sytuację, w której ubezpieczenie x-latka, które wypłaca uposażonym na koniec roku śmierci kwotę c_i ($i \geq 1$), gdy ubezpieczony umarł w wieku $x + i - 1$. Dla $i \geq 0$, składka π_i płacona jest początku roku, gdy ubezpieczony jest w wieku $x + i$. Wówczas otrzymujemy wzór na rezerwę

$$(2.5.1) \qquad {}_kV = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k+i+1}v^{i+1}{}_ip_{x+k}q_{x+k+i} - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{k+i}v^i{}_ip_{x+k}.$$

Zauważmy, że na początku k-tego roku trwania ubezpieczenia. Rezerwa po k latach od wystawienia polisy wynosi ${}_kV$ i ponadto ubezpieczyciel otrzymuje składkę π_k. Zatem stan funduszy ubezpieczyciela wynosi ${}_kV + \pi_k$. Kwota ta powinna pokryć wypłatę c_{k+1} jeśli ubezpieczony umrze w tym roku. W przypadku, gdy ubezpieczony przeżyje najbliższy rok, ubezpieczyciel będzie potrzebował rezerwy w wysokości ${}_{k+1}V$. Zatem otrzymujemy wzór rekurencyjny:

$${}_kV + \pi_k = vc_{k+1}q_{x+k} + v_{k+1}Vp_{x+k}.$$

Zadanie 2.5.5. Udowodnij wzór rekurencyjny dla rezerwy netto wykorzystując równanie (2.5.1).

Zauważmy, że na mocy powyższej zależności składkę netto π_k możemy wyrazić za pomocą wzoru

$$\pi_k = \pi_k^s + \pi_k^r,$$

gdzie

$$\pi_k^s := v_{k+1}V - {}_kV$$

nazywamy *składką oszczędnościową*, zaś

$$\pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1}V)vq_{x+k}$$

jest *składką pokrywającą bieżące ryzyko śmierci.*

Zadanie 2.5.6. Udowodnij, że rezerwa ${}_kV$ jest zakumulowaną wartością dotychczas zapłaconych składek oszczędnościowych, tzn.

$${}_kV = \sum_{j=0}^{k-1}(1+i)^{k-j}\pi_j^s,$$

gdzie i jest techniczną stopą oprocentowania.

2.5.3 Zysk techniczny

Firma ubezpieczeniowa inwestuje uzyskane składki i może otrzymać większy stopę zwrotu i' niż techniczna stopę oprocentowania i. Uwzględniając konkurencję na rynku ubezpieczyciel będzie zmuszony do zaproponowania ubezpieczonemu udział w zyskach. Mianowicie jeśli ubezpieczyciel otrzymał stopę zwrotu $i' > i$ w ciągu k-lat inwestowania składek, to *zysk w oszczędnościowy* na koniec roku $(k+1)$ wynosi

$$G_{k+1}^s = ({}_kV + \pi_k^s)(i' - i).$$

Zatem $G_{k+1}^s = {}_{k+1}Vv(i'-i)$ i stąd wnosimy, że przyszłoroczna rezerwa ${}_{k+1}V$, wszystkie przyszłe świadczenia i składki będą przemnożone przez

$$1 + v(i' - i) = v(1 + i').$$

Zadanie 2.5.7. Składka oszczędnościowa została ustalona na stałym poziomie 500 zł. w pewnym kontrakcie ubezpieczeniowym wycenionym przy technicznej stopie $i = 5\%$. Po dwóch latach ubezpieczyciel zrewaloryzował składki i sumę ubezpieczenia otrzymując rezerwę ${}_3V = 1700$ zł. Oblicz stopę zwrotu ubezpieczyciela z inwestycji uzyskanych składek.

2.6 Składki i rezerwy brutto

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem wyznaczenia *składki brutto*, tzn. składki netto obciążonej kosztami ubezpieczyciela. Koszty ponoszone przez firmę ubezpieczeniową podzielone są na trzy grupy:

Koszty akwizycji
Są to koszty związane z wystawieniem nowej polisy i pobierane są jednorazowo proporcjonalnie do sumy ubezpieczenia. Współczynnik proporcjonalności oznaczmy przez α.

Koszty pobierania składki
Koszty pobierania składki pobierane są w czasie płacenia składki są proporcjonalne do składki brutto. Współczynnik proporcjonalności oznaczmy przez β.

Koszty administracyjne (zarządzania polisą)
Koszty administracyjne pobierane są w całym okresie ważności polisy i są proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Współczynnik proporcjonalności oznaczmy przez γ.

Na ogół składkę brutto P^{br} wyznacza się z równania:

$$P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = JSN + \alpha + \beta P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{m}|}, \tag{2.6.1}$$

gdzie JSN jest jednorazową składką netto polisy, składki płacone są prze n lat, a m jest okresem ważności polisy. Oczywiście w zależności od modelu symbole $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$ można zastąpić $\ddot{a}_x$.

Zadanie 2.6.1. Zapisz równanie dla składki brutto $P^{br}_{x:\overline{n}|}$ dla ubezpieczenia na życie i dożycie. Udowodnij, że

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha d + \gamma}{1-\beta}.$$

Rezerwę brutto po k latach definiujemy podobnie jak rezerwę netto i jest to *wartość oczekiwana bieżącej wartości w chwili k przyszłych wypłat i wydatków – wartość oczekiwana bieżącej wartości w chwili k przyszłej składki brutto.*

Obliczmy składkę brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie. W świetle powyższej definicji otrzymujemy, że

$${}_kV^{br}_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} + \beta P^{br} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} + \gamma \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{br} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}.$$

Zauważmy, że nie uwzględniliśmy przyszłych kosztów akwizycji, gdyż takich nie ma. Koszty te ponoszone są jednorazowo w momencie wystawiania polisy. Następnie uwzględniając równianie dla składki brutto otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
{}_kV^{br}_{x:\overline{n}|} =& A_{x+k:\overline{n-k}|} + \beta P^{br} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} + \gamma \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
&- (A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P^{br} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{m}|}) \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
=& (1+\alpha)_k V_{x:\overline{n}|} - \alpha.
\end{aligned}$$

Zadanie 2.6.2. Uzasadnij ostatnią równość w powyższym wzorze.

Zadanie 2.6.3. W terminowym 20-letnim ubezpieczeniu na życie i dożycie dla kobiety 30-letniej z sumą ubezpieczenia 10 000 zł. wyznacz składkę brutto płatną na początku roku przez 10 lat jeśli wiadomo, że jednorazowe koszty związane z wystawieniem polisy wynoszą 5% sumy ubezpieczenia, koszty pobory składek wynoszą 10% składki brutto, zaś koszty akwizycji wynoszą 1% ubezpieczenia. Ile wynosi rezerwa brutto po 10 latach płacenia składki?

Bibliografia

[1] Błaszczyszyn B., Rolski T. *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT 2004.

[2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, 1986.

[3] Butcher M. V., Nesbitt C. J, *Mathematics of compouned interest*, Ulrich's Book, Ann Arbor, Michigan, 1971.

[4] Gerber H.U., *Life insurence mathematics*, Springer, Berlin 1997.

[5] Strona www Głównego Urzędu Statystycznego: http://www.stat.gov.pl/gus/

[6] *Instrumenty pochodne*, Sympozjum Matematyki Finansowej, Universitas, Kraków, 1997.

[7] Kellison S., *The Theory of Interest.* Irwin/McGraw-Hill, 2008.

[8] Ostasiewicz W. *Wybrane zadania z egzaminów dla aktuariuszy wraz z rozwiązaniami i wyjaśnieniami*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2010.

[9] Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł.,*Matematyka finansowa*, WNT, Warszawa 2003.

[10] Plaskacz S., *Procent składany*, TNOiK, Toruń, 1998

[11] Pliska S. R., *Wprowadzenie do matematyki finansowej, modele z czasem dyskretnym*, WNT, Warszawa 2005.

[12] Podgórska M., Klimkowska J., *Matematyka finansowa*, PWN, Warszawa 2005

[13] Skałba M. *Ubezpieczenia na życie.* WNT 1999

[14] Stroiński E., *Ubezpieczenia na życie – teoria i praktyka*, Poltext, Warszawa 2003.